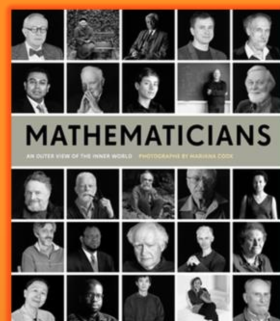
Συλλογή με Μαθηματικές εργασίες

Ανάλυση, Γεωμετρία, Νέες Τεχνολογίες κ. ά.





3 από 6 αρχεία



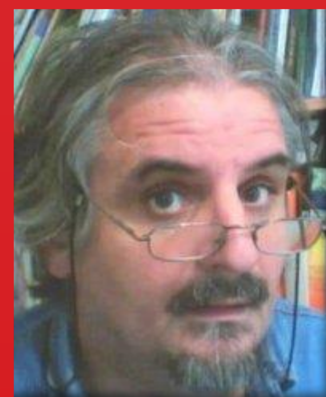
Γιάννης Πλατάρος



Ανθυφαίρεση Ανταναίρεση	Η Ευκλείδεια Γεωμετρία Το άπειρο	Απειροστικός Λογισμός Αντιπαράδειγμα	2015

Διδακτική Μαθηματικών

στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.



Μεσσήνη

Η διδασκαλία μαθηματικών εννοιών με παραδείγματα και αντιπαραδείγματα

Γιάννης Π. Πλατάρος ΜΠΕ Διδακτικής & Μεθοδολογίας των Μαθηματικών
plataros@gmail.com

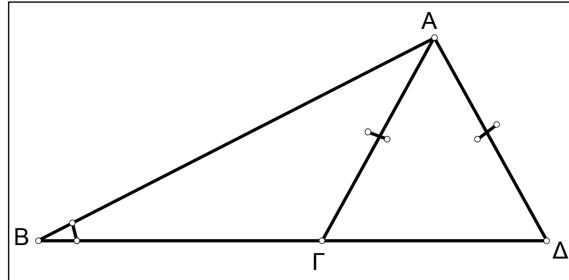
Περίληψη: Τα παραδείγματα και τα αντιπαραδείγματα κατέχουν κεντρικό ρόλο στην διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών, καθώς μπορούν να τις καλύψουν διδακτικώς πλήρως. Παραλλήλως, η χρήση επίλεκτων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, μπορεί να ελαττώσει σημαντικό μέρος της ισχύος σε συγκεκριμένα διδακτικά εμπόδια που παρουσιάζονται κατά την διδασκαλία , ενώ η πληρότητα κάλυψης των εννοιών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως κριτήριο αξιολόγησης των αντιστοίχων διδακτικών εγχειριδίων.

Εισαγωγή: Όλοι συμφωνούν, ότι η διδασκαλία , θα πρέπει να επιτελείται με τα «κατάλληλα» διδακτικά παραδείγματα Η επιλογή τους επαφίεται στην εμπειρία του διδάσκοντος και των βιβλίων που έχει υπ΄ όψιν του. Μια συνέπεια αυτής της υποκειμενικότητας , είναι ότι ορισμένες έννοιες δεν καλύπτονται σε ολόκληρο το πλάτος και το βάθος τους με τα παραδείγματα που διδάσκονται. Έτσι έχουμε δυσμενή μαθησιακά αποτελέσματα στους μαθητές. Στην παρούσα εργασία, θα προσπαθήσουμε να αντικειμενοποιήσουμε και να περιγράψουμε σαφέστερα τα όρια των «καταλλήλων» παραδειγμάτων για κάποιες μαθηματικές έννοιες.

Οι έννοιες και τα παραδείγματα: Κάθε μαθηματική έννοια χωρίζει τα μαθηματικά αντικείμενα στα οποία αναφέρεται σε δύο κλάσεις: Στην κλάση των **παραδειγμάτων** (examples) που την πληρούν και στην κλάση των **αντιπαραδειγμάτων** (counterexamples ή non examples[1]) που δεν την πληρούν. Διδακτικά , η μη χρήση αντιπαραδειγμάτων στην διδασκαλία των μαθηματικών αφαιρεί από τον διδάσκοντα ένα μέρος της διδακτικής του ισχύος . Με αυτή την οπτική, φαίνεται παράξενο που η λέξη αντιπαράδειγμα απουσιάζει από πολλά διδακτικά βιβλία μαθηματικών καθώς αυτό αποτελεί «εργαλείο σε ετοιμότητα» του διδάσκοντα. λ.χ σε λανθασμένο ισχυρισμό του μαθητή , ιδίως όταν ο ισχυρισμός ανήκει στα συνήθη, αναμενόμενα, γνωστά λάθη των μαθητών. Όταν π.χ. ο μαθητής

[1] Ο όρος «non example» αναφέρεται συνήθως σε ορισμούς και ο όρος «counterexample» σε προτάσεις και θεωρήματα. Επειδή η μετάφραση ως «μη παράδειγμα» δεν στέκει καλώς στα Ελληνικά, θα μεταφέρουμε και τους δύο όρους ως «αντιπαράδειγμα»

ισχυρισθεί, ότι «δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και από μια γωνία τους ίση» τότε θα πρέπει να είναι έτοιμος να σχεδιάσει το διπλανό σχήμα που αποτελεί το κλασικό αντιπαράδειγμα στον λανθασμένο ορισμό του μαθητή , όπου τα τριγ.ΑΒΓ και τριγ.ΑΒΔ πληρούν τις προϋποθέσεις του ισχυρισμού, αλλά όχι το συμπέρασμα.



Ακόμα και στις μικρές βαθμίδες , το αντιπαράδειγμα αποτελεί «ετοιμοπόλεμο εργαλείο» του διδάσκοντα , όταν λ.χ. ο μικρός Κωστάκης στην πρόσθεση κλασμάτων επιμένει να προσθέτει ή να αφαιρεί αριθμητές με αριθμητές και παρονομαστές με παρονομαστές. Πειστικά αντιπαράδειγμα δίνει η κλάση $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\alpha}{2\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$ ή $\frac{2\alpha}{2\beta}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$ μέσα από την οποία ο διδάσκων μπορεί να παραθέσει το $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ όπου όλοι γνωρίζουν ότι κάνει 1 και όχι πάλι $\frac{1}{2}$ που δίνει ο υπολογισμός του Κωστάκη , ενώ για την αφαίρεση , όλοι επίσης ξέρουν ότι $\frac{2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ *και όχι* $\frac{1}{2}$ που υπολογίζει ο Κωστάκης με τον λανθασμένο τρόπο του.

Γνωστικές συγκρούσεις μέσω αντιπαραδειγμάτων: Θεωρείται, ότι ο βασικότερος ρόλος ενός δασκάλου των μαθηματικών, είναι να δημιουργεί, να εφευρίσκει και να ανακαλύπτει καταστάσεις που να ευνοούν την «σύγκρουση γνώσεων» Παλαιότερες εδραίες και πρωταρχικές γνώσεις που θεωρούνται «κοινές» και συνήθως έχουν καθιερωθεί και με την βοήθεια των αισθήσεων, συγκρούονται με την νέα γνώση που παράγεται με σκέψη και συλλογισμό. Σε αυτή την διαδικασία το αντιπαράδειγμα κατέχει πρωταγωνιστικό ρόλο. Για παράδειγμα, οι μαθητές γνωρίζουν την πανάρχαια προφανή «κοινή έννοια» στον Ευκλείδη ότι «το όλον , μείζον του μέρους εστί» Έτσι, δεν έχουν κανένα πρόβλημα να παραδεχθούν ότι $x>\frac{1}{2}x$ για κάθε x . Οι ίδιοι μαθητές, παραλλήλως, γνωρίζουν πολύ καλά ότι -2>-4 . Εδώ το αντιπαράδειγμα που θα προκαλέσει την γνωστική

σύγκρουση, συνίσταται στην εξεύρεση λύσης στην ανίσωση $x < \frac{1}{2}x$, η οποία αληθεύει για κάθε αρνητικό αριθμό. Να επισημάνουμε όμως, ότι σύμφωνα με την γνώμη πολλών ερευνητών, μόνο η παράθεση του αντιπαραδείγματος δεν αρκεί για να προκαλέσει την γνωστική σύγκρουση , καθώς ο διδάσκων θα πρέπει να γνωρίζει καλώς τα λανθασμένα νοητικά μοντέλα που χρησιμοποιούν οι μαθητές, ώστε να σχεδιάσει τις αντίστοιχες δραστηριότητες γνωστικής ρήξης στο κατάλληλο πλαίσιο οι οποίες θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν εντυπωσιακές, άλλως υπάρχει ο κίνδυνος το παλαιό μοντέλο να παραμείνει αμετακίνητο ή (ακόμα χειρότερα) τα παλαιό να συγκατοικήσει με το νέο.

Η πλήρης διδακτική κάλυψη μιας έννοιας, απαιτεί παράθεση **αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων**, δηλ. παραδειγμάτων που καλύπτουν την έννοια σε ολόκληρο το πλάτος και το βάθος της , όπως και σε όλες τις μορφές περιπτώσεων που μπορεί να θεωρηθεί , κατά το δυνατόν. Θα μπορούσε να ισχυρισθεί κάποιος, ότι μόνο τα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα καλύπτουν επαρκώς μια έννοια και δεν χρειάζονται τα αντιπαραδείγματα. Διδακτικώς όμως, πάρα πολλά πράγματα ξεκαθαρίζονται από την επισήμανση όχι μόνο από το τι είναι κάτι, αλλά και **από το τι δεν είναι**. Επομένως εξ ίσου αναγκαία είναι και η κάλυψη με αντιπαραδείγματα και μάλιστα από **«εφαπτόμενα αντιπαραδείγματα»** τα οποία θα μπορούσαμε να τα θεωρήσουμε ως τα παραδείγματα που δεν πληρούν τον ορισμό ή τις υποθέσεις της προτάσεως **παρά μία συνθήκη**. Αυτά, δείχνουν την συνεισφορά και την αναγκαιότητα κάθε συνθήκης στο κτίσιμο μιας έννοιας και έτσι τελικώς, με αντιπροσωπευτικά παραδείγματα και εφαπτόμενα αντιπαραδείγματα, **υπερκαλύπτουμε** διδακτικά κάθε έννοια ή πρόταση.

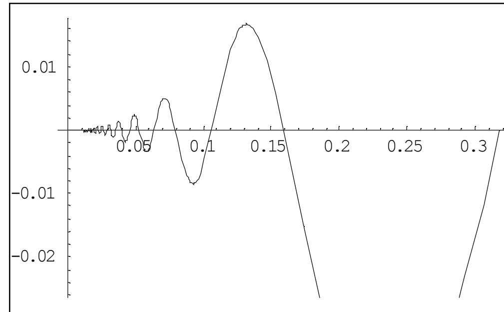
Μπορεί να γίνει πλήρως κατανοητή μια έννοια μόνο με τον ορισμό της και χωρίς παραδείγματα; Η εύκολη απάντηση στο ερώτημα είναι ότι τα παραδείγματα επιβάλλονται παιδαγωγικώς και επίσης ότι ορισμένα φωτισμένα μυαλά μπορούν να κατανοήσουν σπουδαία πράγματα με ελάχιστη ή και καθόλου εποπτεία. Για να δούμε τα όρια αυτής της άποψης, ας δώσουμε ένα παράδειγμα από τον Απειροστικό. Έστω η πρόταση: «Αν μία συνάρτηση f: [α,β] $\rightarrow$ □ είναι συνεχής , τότε στο α έχω τοπικό ακρότατο» Είναι αληθής; Ας δούμε πώς μπορεί να το προσεγγίσει διαισθητικά ένας μαθητής ή σπουδαστής σκεπτόμενος εποπτικά-γεωμετρικά: « Ξεκινώντας να σχεδιάζω την συνάρτηση από το σημείο (α,f(α)) και σε μια περιοχή του α «οσοδήποτε κοντά» , έχω τρεις δυνατές

επιλογές: Ή να κατευθυνθώ προς τα πάνω (οπότε έχω τοπικό ελάχιστο) ή να προς τα κάτω (οπότε έχω τοπικό μέγιστο) ή να πάω οριζόντια, οπότε (με την ευρεία) έννοια έχω πάλι τοπικό ακρότατο. Επομένως στο α έχω πάντα τοπικό ακρότατο.» Όμως αυτή η σκέψη είναι λανθασμένη λόγω του αντιπαραδείγματος $f:[0,\frac{1}{\pi}]\to\mathbb{R}$

με

$$f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Φυσικά, ένας άνθρωπος, μπορεί να γνωρίζει άριστα την λεκτική διατύπωση του ορισμού της συνάρτησης , αλλά ων δέσμιος των περιορισμένων αντικειμένων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δεν μπορεί να φανταστεί ότι «οσοδήποτε κοντά στο 0» μπορεί να έχω ταλάντωση με ετερόσημες τιμές και άρα το (0, f(0))δεν μπορεί ποτέ να είναι ακρότατο. Επίσης ισχύει, ότι σε οιοδήποτε υποδιάστημα , οσοδήποτε κοντά στο 0 η συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη. Επιστημολογικώς έχει συμβεί κάτι που ιστορικά είναι γνωστό: «Σε ό,τι έχει να κάνει με το άπειρο και το απειροστό, δεν πρέπει να εμπιστευόμαστε πολύ την φαντασία ή την διαίσθησή μας» Τα πρώτα νοητικά μοντέλα που αναπτύσσει ο εγκέφαλος για την συνάρτηση και τα οποία φυσικά προέρχονται από τα ίδια τα παραδείγματα συναρτήσεων, δεν συμπεριλαμβάνουν τις συναρτήσεις με άπειρο μήκος σε ένα κλειστό διάστημα ή με άπειρη ταλάντωση ή μη φραγμένης κυμάνσεως . Τέτοιες «παράξενες» συναρτήσεις δεν μπορεί να σχεδιάσει πλήρως ούτε ανθρώπινο χέρι ούτε Η/Υ. Οι λόγοι για τους οποίους όμως πρέπει να υπάρχουν κάποιες τέτοιες **(λίγες)** συναρτήσεις σε ένα διδακτικό εγχειρίδιο , έστω χωρίς την απαιτούμενη ανάπτυξη ή «αυστηρότητα» είναι νομίζω προφανείς.

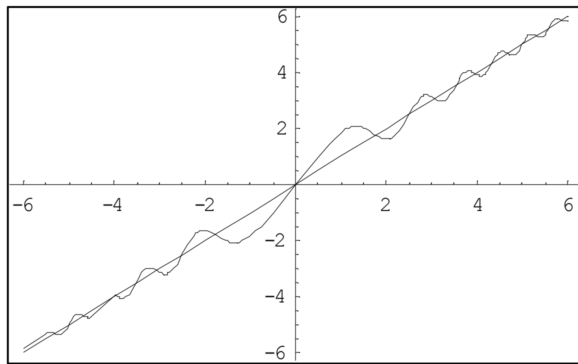


Σχήμα 1.

Η έννοια της «ασύμπτωτης ευθείας σε συνάρτηση» και τα προβλήματά της: Η έννοια αυτή ετυμολογικώς παραπέμπει σε μια ευθεία που πλησιάζει στο άπειρο τη συνάρτηση, αλλά ποτέ δεν εφάπτεται σ΄ αυτή , πόσω δε μάλλον να την τέμνει. Ο σχετικός ορισμός δεν ξεκαθαρίζει τα πράγματα, καθώς η γεωμετρική μετάφραση – αναπαράσταση της έκφρασης « $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\mu)]=0$ » για πολλούς μαθητές είναι ότι «η ευθεία δεν εφάπτεται με την συνάρτηση ή –τελικά ,

οριακά- εφάπτεται στο άπειρο» Έτσι, είναι πιθανόν μια λανθασμένη αυθαίρετη γενίκευση στο μυαλό κάποιων μαθητών τη βοηθεία και της ιδίας της λέξης «ασύμπτωτη» να οδηγεί στην πεποίθηση της μη επαφής. Αυτό, μπορεί να προληφθεί με ένα παράδειγμα σαν το ακόλουθο:

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}\sin x^2 & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$, όπου η f είναι συνεχής παντού και επιδέχεται και στο $+\infty$ και στο $-\infty$ ως πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία y=x . Η ευθεία και η συνάρτηση έχουν άπειρα σημεία τομής σε κάθε υποδιάστημα ξεχωριστά ($-\infty$, -M] και [M, $+\infty$) για οσοδήποτε μεγάλο και θετικό M.



Οι διδακτικά σπουδαίες ιδιότητες της συνάρτησης του Dirichlet : Μπορεί ένα και μοναδικό παράδειγμα να καλύπτει πολλές έννοιες του απειροστικού; Η απάντηση είναι ότι αυτό είναι δυνατόν και αυτή είναι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ -1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$. Ανήκει στην ομάδα των «παθολογικών συναρτήσεων» για τις οποίες ένοιωθε αποστροφή ο **Poincare** χωρίς όμως να υποψιάζεται την εμφάνισή τους μετά από χρόνια σε πολλούς τομείς του επιστητού. Αυτή, έχει πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες :

- Ιστορικά, όταν τέθηκε στην μαθηματική κοινότητα, στάθηκε αιτία της διεύρυνσης του ατελούς μέχρι τότε (1837) ορισμού της συνάρτησης σε έναν πιο τέλειο(ότι δηλ. είναι μια «αυθαίρετη» μονοσήμαντη αντιστοιχία) πριν φθάσει στον σύγχρονο ορισμό που έγινε από τον Hausdorff to 1914 με την χρήση της έννοιας του διατεταγμένου ζεύγους . Σύμφωνα με την αναλογική εφαρμογή στην Διδακτική του βιογενετικού νόμου ότι «Η **οντογένεση** επαναλαμβάνει συντόμως την **φυλογένεση**» ο μαθητής θα κατανοήσει καλύτερα την έννοια της συνάρτησης μέσω και της συγκεκριμένης (ή όποιας άλλης τύπου Dirichlet)

- Ήταν το πρώτο ιστορικό παράδειγμα συνάρτησης που ορίζετο χωρίς κάποια συγκεκριμένη αναλυτική έκφραση.
- Ήταν το πρώτο ιστορικό παράδειγμα συνάρτησης ασυνεχούς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και σε κάθε περιορισμό του.
- Η f είναι ασυνεχής παντού, αλλά η |f| είναι συνεχής παντού.(Αντιπαράδειγμα στο αν ισχύει αντίστροφο σχετικής πρότασης)
- Αν $g(x) = -f(x)$ τότε και η g είναι ασυνεχής παντού, αλλά η

fg(x)=-1 είναι παντού συνεχής, όπως και η (*f*-*g*)(x)=0 είναι παντού συνεχής , όπως και η $\frac{f}{g}(x) = -1$ είναι συνεχής , όπως και η $(f \circ g)(x) = 1$, είναι επίσης συνεχής. (Ένα αντιπαράδειγμα για τέσσερις ισχυρισμούς ισχύος σχετικών αντίστροφων προτάσεων)

- Είναι περιοδική με περίοδο οιοδήποτε θετικό ρητό αριθμό. (Σύμφωνα με άλλο ορισμό της περιοδικής συνάρτησης, δεν είναι περιοδική διότι δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο.)
- Η f^2 είναι συνεχής, ενώ η f είναι ασυνεχής.(Επίσης αντιπαράδειγμα σε ισχυρισμό ισχύος σχετικής αντίστροφης πρότασης)
- Η f, χωρίς να είναι σταθερή, δεν είναι μονότονη συνάρτηση ,αλλά και δεν υπάρχει υποδιάστημα του R στο οποίο να είναι μονότονη.
- Η *f(x)* ορίζεται στο R ,ενώ σε κάθε υποδιάστημα του R, οσοδήποτε μικρό, περιέχονται άπειρες θέσεις ακροτάτων της f .
- Η *f(x)* /[α,β] είναι φραγμένη και δεν είναι ολοκληρώσιμη, όμως η |*f*| καθώς και η f^2 είναι ολοκληρώσιμες.(Αντιπαράδειγμα σε σχετικούς ισχυρισμούς ισχύος αντιστρόφων γνωστών προτάσεων)
- Αν $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ δεν πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano «στον μέγιστο δυνατό βαθμό»(: = όχι συνεχής, όχι ετερόσημες τιμές , όχι ορισμένη σε κλειστό διάστημα) ενώ πληροί το συμπέρασμα επίσης «στον μέγιστο δυνατό βαθμό»(:=έχω όχι μία τουλάχιστον ρίζα, αλλά άπειρες και δη υπεραριθμήσιμες) , πράγμα που την καθιστά «ιδανικό παράδειγμα» για την μη ισχύ του αντιστρόφου του θεωρήματος. (Ικανές, αλλά όχι αναγκαίες συνθήκες)

Ο ρόλος των «συνήθων λαθών» σε σχέση με τα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα: Θεωρητικώς, οι δυνητικά λανθασμένες απαντήσεις σε συγκεκριμένες ερωτήσεις περί τα μαθηματικά, συνιστούν ένα σύνολο πολύ μεγάλου πληθικού αριθμού . Στη πραγματικότητα οι λανθασμένες απαντήσεις, είναι **εξαιρετικά περιορισμένες σε αριθμό** και μάλιστα **επαναλαμβάνονται επιμόνως** από πολλές γενιές μαθητών. Σχεδόν όλα αυτά τα «επίμονα λάθη» αποδίδονται σε διδακτικά (ή γνωστικά) εμπόδια δηλ. σε επιστημολογικά εμπόδια. Κατά γνώμη του γράφοντος, ορισμένα από αυτά έχουν υπερεκτιμηθεί ,αφού το εμφανιζόμενο ως καθαρό επιστημολογικό εμπόδιο είναι μόνο γλωσσικό και αίρεται με κατάλληλο παράδειγμα. Ήδη έχουμε επεξεργαστεί το θέμα της «ασύμπτωτης» όπου στα Ελληνικά πράγματι αποτελεί διδακτικό εμπόδιο αφού η λέξη παραπέμπει στην μη σύμπτωση, άρα αποκλείεται να υπάρχουν κοινά σημεία συνάρτησης και ασύμπτωτης, πράγμα που όπως δείξαμε δεν συμβαίνει. Στον Αγγλόφωνο μαθητή, ο ίδιος όρος είναι «asymptote» ο οποίος ως Ελληνικός , ετυμολογικώς , δεν του λέει απολύτως τίποτα , άρα δεν αποτελεί ιδίου βαθμού διδακτικό εμπόδιο γι αυτόν (ένα μέρος του εμποδίου δεν είναι γλωσσικό)

Άλλο παράδειγμα είναι η έννοια της λέξης «συνεχής», όπου στα Ελληνικά (αλλά και σε άλλες γλώσσες) είναι συνυφασμένη με την έννοια της συνεκτικότητας (δηλ. του «μονοκόμματου») Επομένως, το γιατί οι ακολουθίες είναι «συνεχείς συναρτήσεις», είναι το πρώτο γνωστικό εμπόδιο που θα αντιμετωπίσουν στο πρώτο έτος σπουδών τους στα ανώτερα Μαθηματικά, αφού η έννοια της συνέχειας στο Λύκειο ,βάσει αναλυτικού προγράμματος σπουδών, ορίζεται μόνο για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Κάποιες φορές ,ορισμένοι μαθητές, δεν αντιλαμβάνονται τις ακολουθίες ως συναρτήσεις, πιθανώς και λόγω διαφορετικού συμβολισμού. Γι΄ αυτούς τους μαθητές, είναι ακόμα πιο δύσκολο να αντιληφθούν τις ακολουθίες ως συνεχείς συναρτήσεις, ιδίως, όταν υπάρχει η πλάνη ότι «οι συνεχείς συναρτήσεις σχεδιάζονται με μονοκονδυλιά στο πεδίο ορισμού τους» Όταν γίνει επίκληση του αντιπαραδείγματος ότι και μια πολυωνυμική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ¡ δεν μπορεί να σχεδιαστεί με μονοκονδυλιά λόγω απειρίας του μήκους της, το γνωστικό εμπόδιο δεν αίρεται, και γίνεται μια αναδιατύπωση του τύπου «κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού σύνολο πεπερασμένου μήκους (:=μέτρου) γράφεται με μονοκονδυλιά») Αν εδώ παρατεθεί το αντιπαράδειγμα (:=αντιπαρατεθεί το παράδειγμα) της

$f:[-1,0)\cup(0,1]\to\mathbb{R}\ \ \mu\varepsilon\ \ f(x)=\dfrac{1}{x}$ με μ([-1,+1] $-\{0\}$)=2 όπου η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της , όμως στο 0 παρουσιάζει «άπειρο πήδημα» και άρα δεν μπορεί να γραφεί με μονοκονδυλιά, **πάλι δεν αίρεται το εμπόδιο**, αφού συνηθέστατα έχω και νέα αναδιατύπωση ότι «κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα, γράφεται με μονοκονδυλιά!» Και πάλι όμως, δεν είναι ικανοποιητικά τα πράγματα, αφού η εξωμαθηματική έννοια της «μονοκονδυλιάς» παραπέμπει μεν σε συνεκτική γραμμή , αλλά μπορεί να έχει άπειρο μήκος (μη σχεδιάσιμη από άνθρωπο ή Η/Υ) ή μπορεί να έχει μεν πεπερασμένο μήκος, αλλά να παρουσιάζει άπειρη ταλάντωση (άρα πάλι δεν μπορεί να σχεδιαστεί ικανοποιητικά από άνθρωπο ή Η/Υ) Η δοξασία της «μονοκονδυλιάς» σε κλειστό διάστημα , παραμένει ισχυρή και αίρεται μόνο με παράδειγμα συνάρτησης με άπειρα ακρότατα σε κλειστό διάστημα , όπως αυτή στο σχήμα 1 , όπου φυσικά δεν ασχολούμαστε με απόδειξη και το παράδειγμα γίνεται αντιληπτό διαισθητικά. Η ανακρίβεια της «μονοκονδυλιάς» για συνεχή f σε κλειστό διάστημα, ίσως είχε το ελαφρυντικό της εξωμαθηματικής έκφρασης, αλλά και η έκφραση «μονοκόμματη γραμμή» είναι κι αυτή εξωμαθηματική , όμως ακριβέστερη και προσεγγίζει κάπως ικανοποιητικότερα την έννοια της **συνεκτικού γραφήματος** από την «μονοκονδυλιά» Από την άλλη όμως, υπάρχει συνάρτηση όπως η $f:[0,1]\to R\ \ \mu\varepsilon\ \ f(x)=\left\{\begin{matrix}\sin\dfrac{1}{x} & \alpha\nu\ \ x\neq 0\\ 0 & \alpha\nu\ \ x=0\end{matrix}\right\}$, που δεν είναι συνεχής στο 0 ,αλλά έχει συνεκτικό γράφημα , πράγμα που υποδεικνύει ότι η χρήση εξωμαθηματικών εκφράσεων πρέπει να γίνεται με **εξαιρετικά μεγάλη φειδώ** και μόνο όταν γνωρίζουμε απολύτως σφαιρικά ένα θέμα .

Διαπιστώσεις προτάσεις: Η έννοια του αντιπαραδείγματος ως αποδεικτικού μέσου σε λανθασμένες γενικεύσεις, είναι μια **διεπιστημονική έννοια** που εφαρμόζεται σε όλες τις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες, στην Λογική και στην Φιλοσοφία , ουσιαστικά σε κάθε τομέα του επιστητού. Στην Επιστημολογία και μάλιστα στο ρεύμα της **διαψευσεοκρατίας,** όπου επιστημονικό χαρακτηρίζεται το **διαψεύσιμο** και ότι η επιστήμη προχωρά με δοκιμές και σφάλματα, το αντιπαράδειγμα κατέχει κεντρική θέση. Αυτή η διαπίστωση , καθιστά αδήριτη ανάγκη την εννοιολογική εισαγωγή του αντιπαραδείγματος στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση ως εργαλείου ανταπόδειξης σε λανθασμένες εικασίες, ισχυρισμούς και γενικεύσεις είτε

αφορούν τα μαθηματικά είτε όχι. Κατά την γνώμη μας, τα σχολικά βιβλία **όλων των βαθμίδων**, θα πρέπει να εμπλουτιστούν και με αντιπαραδείγματα , να τα ονοματίσουν ως τέτοια και να αναδειχθεί η αξία τους ως ανταποδεικτικών μέσων σε προτάσεις του τύπου «όλα τα στοιχεία χ του συνόλου Α έχουν την ιδιότητα Β» ως ανακάλυψη ενός $y \in A$ που δεν έχει την ιδιότητα Β. Πιθανόν στις μικρές βαθμίδες της εκπαίδευσης θα πρέπει να μπει μόνο στο βιβλίο του διδάσκοντα και να υπάρξει μια κλιμάκωση.
Το σημαντικό είναι , ότι ακόμα και η ύπαρξη **ενός και μόνου αξιόλογου παραδείγματος στο διδακτικό υλικό, μπορεί να υποψιάσει και να εμπνεύσει πολλαπλώς έναν μαθητή.** Για παράδειγμα η εισαγωγή της «νιφάδας του Koch» σε μια άσκηση του βιβλίου της Β΄ Λυκείου, υπήρξε εξόχως σημαντική , καθώς μυεί τον μαθητή στην ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων με άπειρη περίμετρο και πεπερασμένο εμβαδόν.

Επομένως, η εισαγωγή στα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών , ορισμένων επί πλέον ευάριθμων παραδειγμάτων, ελεγμένων και αξιολογημένων επιστημονικώς και διδακτικώς ,διευρύνει το γνωστικό πεδίο των μαθητών διευκρινίζει δυσδιάκριτες πτυχές των εννοιών και αίρει μέρος τουλάχιστον της ισχύος σε συγκεκριμένα διδακτικά εμπόδια. Παράλληλα, η πληρότητα κάλυψης των εννοιών και των προτάσεων του βιβλίου με παραδείγματα και αντιπαραδείγματα , μπορεί να αποτελεί ένα βασικό κριτήριο αξιολόγησής του.

Βιβλιογραφικές και διαδικτυακές αναφορές:

Chalmers A. «Τί είναι αυτό που λέμε Επιστήμη;» Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης Ηράκλειο 2001 (σελ.57-118)
Γαγάτσης Α.«Διδακτική των Μαθηματικών» Θεωρία –Έρευνα , Θεσσαλονίκη 1995 (σελ.239-258)
Κολέζα Ε. «Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών» Αθήνα 2000 (σελ.53-62)
Πλατάρος Ι.:«Η Διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού μέσω Αντιπαραδειγμάτων» διπλωματική εργασία στο ΜΠΕ «Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών» του Μαθ/κού Τμήματος του Παν. Αθηνών -2004
Διατίθεται σε: www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_plataros.pdf
Πλατάρος Ι.:«Διδακτικά εμπόδια στην έννοια της ασύμπτωτης συνάρτησης» εργασία. Διατίθεται:briefcase.pathfinder.gr/download/557157
Σπύρου Π. - Γαγάτσης Α. «Συνάρτηση: Επιστημολογική διάσταση και Διδακτική μεταφορά της»
διατίθεται: http://www.math.uoa.gr/me/faculty/spirou/Spyrou%204.pdf

Summary: The examples and the counterexamples play important role in the teaching of mathematic concepts, and they can completely cover them didactically. At the same time, the use of selected examples and counterexamples, can decrease important part of force in concretely instructive obstacles that are presented at the teaching, while the plenitude of covering of concepts , can be also used as criterion of evaluation of corresponding instructive handbooks.

Σεμινάριο εξαμηνιαίας διάρκειας μαθηματικών
Διοργάνωση: Τμήμα μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών

ΕΡΓΑΣΙΑ

Των: Βασιλείου Ξ. Κατωπόδη
Ιωάννη Π. Πλατάρου

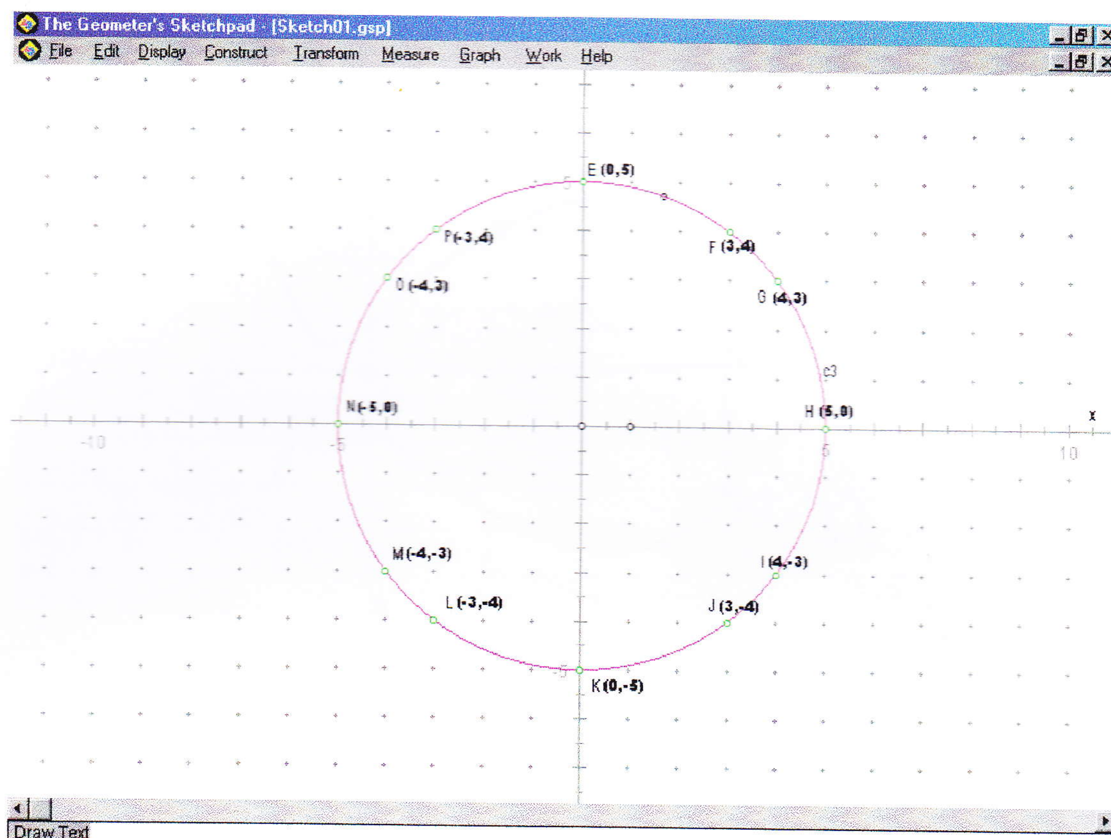
Παρουσίαση μαθήματος εισαγωγής στους
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
με διαδικασίες επίλυσης προβλήματος.

Επιβλέπων καθηγητής:
ΝΙΚΟΣ ΚΛΑΟΥΔΑΤΟΣ



ΑΘΗΝΑ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2000

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ



1. Στο πιο πάνω σχήμα, οι συντεταγμένες καθενός από τα σημειούμενα σημεία E,F,G,.....,P αλλά και οιουδήποτε τυχόντος άλλου Τ(χ,ψ) ικανοποιούν την εξίσωση :

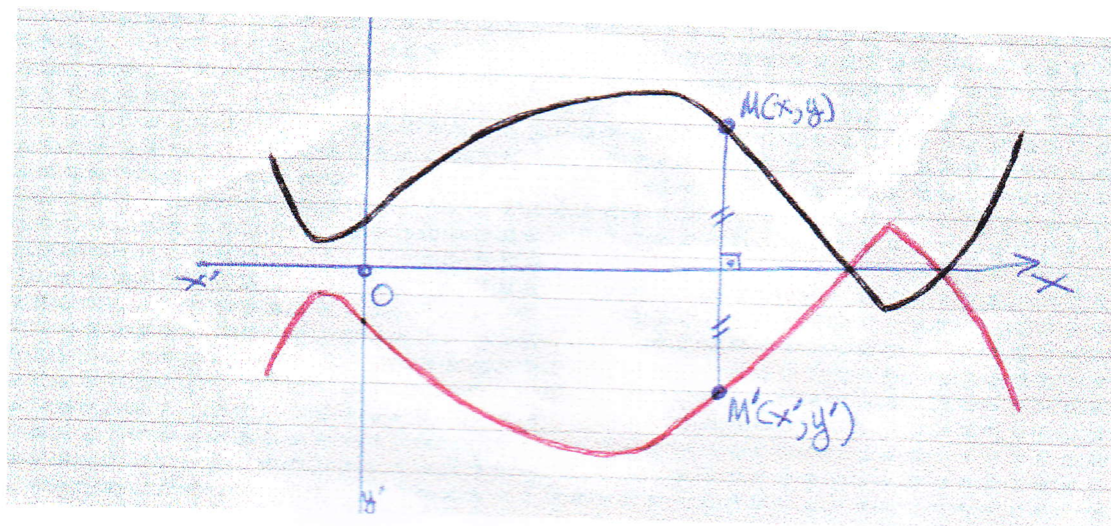
2. Για κάθε ένα από τα σημεία E,F,G,....P και Τ εφαρμόζω την εξής διαδικασία : "Διπλασιάζω την τετμημένη (:χ) αφήνοντας σταθερή την τεταγμένη (: ψ)
Να βρείτε πάνω στο σχήμα σας τα προκύπτοντα νέα σημεία Ε΄,F'G',.....P΄με την προηγούμενη διαδικασία και στη συνέχεια, να ενώσετε με ένα βέλος κάθε παλιό σημείο με το αντίστοιχο νέο.
Τι μεταβολή μπορούμε να πούμε ότι υπέστη ο κύκλος;

3. Ποιά αλγεβρική σχέση συνδέει τις καινούργιες συντεταγμένες χ΄, ψ΄, με τις παλιές χ, ψ,;

   χ΄=.........
   ψ΄=.........

   Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις, να βρείτε την εξίσωση με την οποία συνδέονται τα χ΄, ψ΄, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την εξίσωση με την οποία συνδέονται τα χ,ψ. Ποίο είναι το <u>είδος</u> της καμπύλης που προέκυψε από τον εφαρμοσθέντα μετασχηματισμό;

ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ



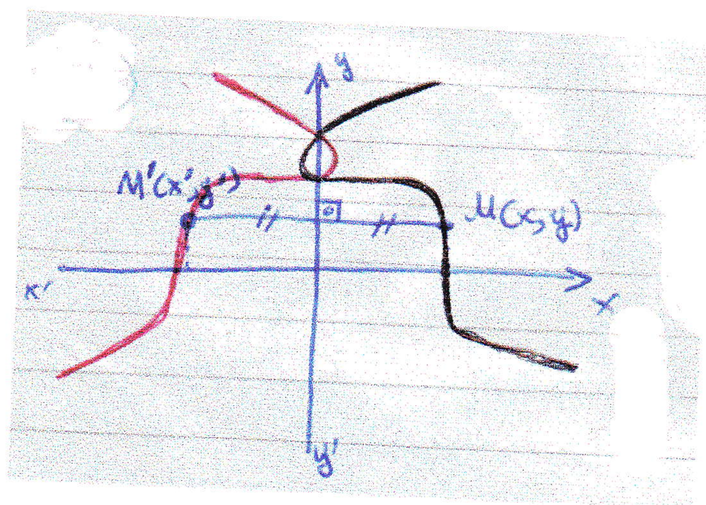
- Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η εφαρμογή του γνωστού μας μετασχηματισμού Τ: "κάθε σημείο του επιπέδου απεικονίζεται στο συμμετρικό του ως προς το άξονα χχ΄"

Α) Να γράψετε τις σχέσεις που συνδέουν τις καινούργιες συντεταγμένες χ΄, ψ΄με τις παλαιές χ,ψ.

Στη συνέχεια να τις γράψετε υπό μορφή συστήματος και να βρείτε τον <u>πίνακα του μετασχηματισμού.</u>

$$\begin{matrix} x' = \ldots\ldots\ldots \\ \psi' = \ldots\ldots\ldots \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \chi' = \ldots\ldots\ldots \\ \psi' = \ldots\ldots\ldots \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix}$$

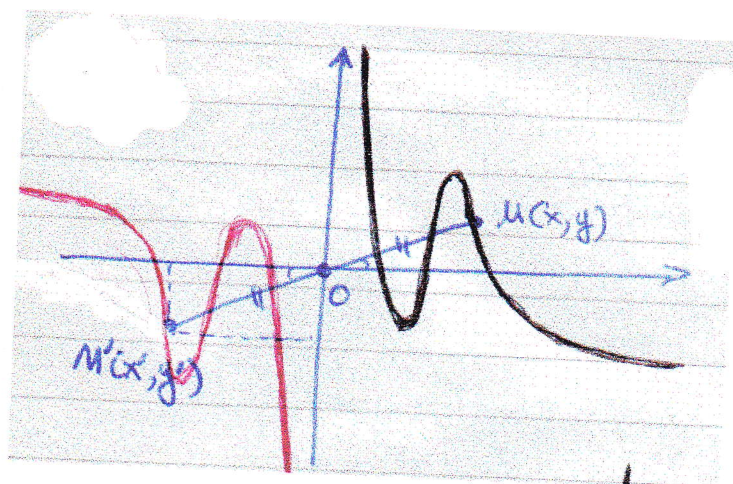
Β) Με την ίδια διαδικασία, να βρείτε τους πίνακες των μετασχηματισμών:
Τ1: "Σε κάθε σημείο του επιπέδου απεικονίζεται το συμμετρικό του ως προς τον άξονα ψψ'.



$\chi' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\Leftrightarrow$ $\chi' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix}\chi' \\ \psi'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\chi \\ \psi\end{bmatrix}$

$\psi' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad$ $\psi' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

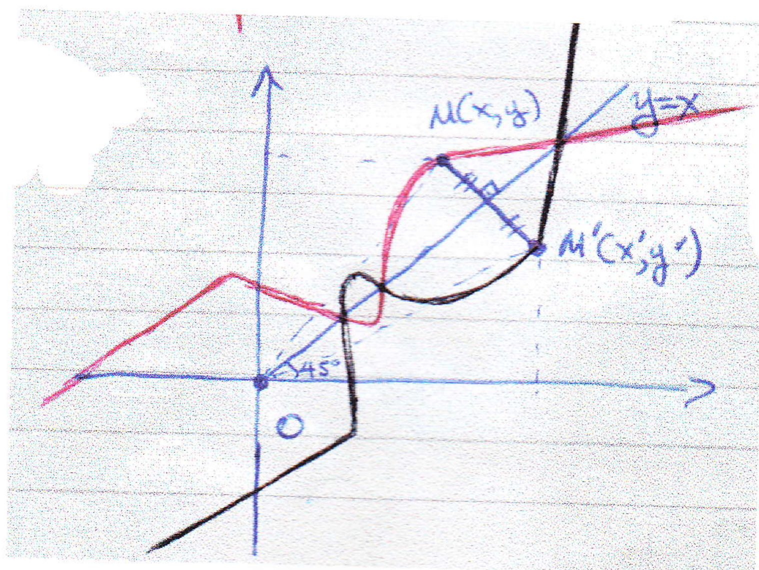
Τ2: "Σε κάθε σημείο του επιπέδου απεικονίζεται το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων Ο(0,0)."



$x' = \ldots\ldots$ $\Leftrightarrow$ $\chi' = \ldots\ldots$ $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix}\chi' \\ \psi'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\chi \\ \psi\end{bmatrix}$

$\psi' = \ldots\ldots$ $\quad$ $\psi'' = \ldots\ldots$

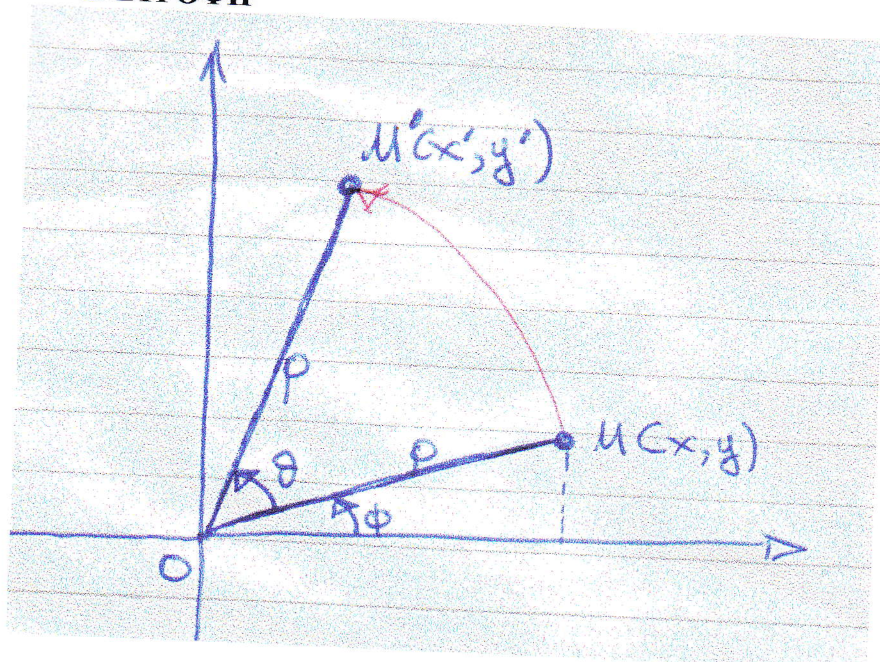
T3:"Σε κάθε σημείο του επιπέδου απεικονίζεται το συμμετρικό του ως προς την ευθεία ψ=χ (πρώτη διχοτόμο των αξόνων)"



$x' = \dots\dots\dots\dots$ $\Leftrightarrow$ $\chi' = \dots\dots\dots\dots$ $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} \chi' \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}$

$\psi' = \dots\dots\dots\dots$ $\psi' = \dots\dots\dots\dots$

- **Η ΣΤΡΟΦΗ**



Στο παραπάνω σχήμα, το σχήμα, το σημείο Μ(χ,ψ) στρέφεται κατά γωνία θ, με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΜ=ρ.

Α) Να εκφρασθούν οι συντεταγμένες χ,ψ συναρτήσει των ρκαι φ.
Β) Να εκφρασθούν οι συντεταγμένες χ΄,ψ΄συναρτήσει των ρ και φ+θ.

Γ) Να εκφρασθούν οι χ΄,ψ΄συναρτήσει των χ,ψ, και θ.

Δ) Να βρεθεί ο πίνακας του μετασχηματισμού.

- Για τον τυχόντα γραμμικό μετασχηματισμό

$$T: \quad \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε τις εικόνες των σημείων Α(1,0) και Β(0,1) των μοναδιαίων διανυσμάτων i και j .)

α) Εκ του αποτελέσματος, μπορείτε να διατυπώσετε έναν μνημονικό κανόνα για τους πίνακες χαρακτηριστικών μετασχηματισμών;

Β) Να εφαρμόσετε τον παραπάνω κανόνα για τον πίνακα της "στροφής".

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ
(ΕΙΣΑΓΩΓΗ)
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ (1η διδακτική ώρα)

Α. Ο Καθηγητής διανέμει το φύλλο εργασίας (από ένα σε κάθε μαθητή) και ζητά να απαντήσουν οι μαθητές στο ερώτημα 1 το οποίο συνιστά υπενθύμιση γνωστού (κύκλος – εξίσωσή του).

Β. Αφού βεβαιωθεί ότι όλοι οι μαθητές έχουν απαντήσει (αναμενόμενος χρόνος απάντησης 2 λεπτά, γράφει στον πίνακα τις σωστές απαντήσεις και ζητά να προχωρήσει όλη η τάξη στην διαπραγμάτευση του 2. Στο τελευταίο υποερώτημα του 2 δέχεται όλες τις εξωμαθηματικές ορολογίες για απαντήσεις (π.χ. " τεντώθηκε", "τραβήχτηκε", "επιμηκήθηκε", "έγινε σαν αυγό", "παραμορφώθηκε", "έγινε έλλειψη") τις οποίες και γράφει στον πίνακα.

- Επισημαίνει ότι η τελευταία πιθανή απάντηση χρήζει αποδείξεως.
- Με την "μαιευτική μέθοδο" θέτει ερωτήσεις ώστε να αποσπασθεί ο ορισμός του μετασχηματισμού ως συνάρτηση.
  - Ο κύκλος είναι σύνολο;
  - Το νέο σχήμα είναι σύνολο;
  - Κατά την διαδικασία χάθηκε κάποιο σημείο;
  - Όλα τα αρχικά σημεία έχουν αντίστοιχο;
  - Ένα αρχικό σημείο πόσα αντίστοιχα έχει;
  - Πως είναι ήδη γνωστή η προηγούμενη διαδικασία;

Γράφει στον πίνακα τον ορισμό του γεωμετρικού μετασχηματισμού,που βρέθηκε με την βοήθεια των μαθητών.
Επιδεικνύει το παράδειγμα με το πλέγμα στο έδαφος. (Διαφάνεια 1)

Γ.

- Ζητά από τους μαθητές την διαπραγμάτευση της 3.
- Γράφει την τελική απάντηση στον πίνακα (έλλειψη) όπως και την εξίσωσή της.

Δείχνει το πώς η σχέση $\left\{\begin{matrix} x'=x \\ \psi'=2\psi \end{matrix}\right\}$ ισοδυναμεί με

$$\begin{matrix} x'=1.x+0.\psi \\ \psi'=0.\chi+2.\psi \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \chi' \\ \psi' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}$$

- Ορίζει τις έννοιες " γραμμικός μετασχηματισμός ", " πίνακας γραμμικού μετασχηματισμού" δείχνοντας την ισοδυναμία:

$$\begin{matrix} x'=\alpha x+\beta\psi \\ \psi'=\gamma\chi+\delta\psi \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}$$

- Δ. Ζητά την διαπραγμάτευση του $4^{ου}$ θέματος των βασικών γεωμετρικών μετασχηματισμών στο διανεμηθέν φυλλάδιο.

- Επιδεικνύει τους μετασχηματισμούς ενός τετραγώνου πλαισίου – πλέγματος μέσω της οπτικοποίησης που παρέχουν τα διανύσματα $\vec{AA'}$ όπου A: αρχική θέση, και Α΄: τελική θέση σημείου.(Διαφάνειες 2 και 3)

Δηλαδή: Κάθε μαύρο πλέγμα έχει 25 σημεία τα οποία μέσω του διπλανού πίνακα της γραμμικής απεικόνισης πηγαίνουν σε μια νέα θέση. Από κάθε αρχικό και τελικό σημείο δημιουργούνται 25 διανύσματα τα οποία οπτικοποιούν το είδος της μεταβολής που δημιουργεί ο πίνακας στο επίπεδο .

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΜΕ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ, ΣΤΗΝ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ.

Των Βασιλείου Ξ. Κατωπόδη –Ιωάννη Π. Πλατάρου.

1. Η ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΓΝΩΣΗΣ (Κονστρουκτιβισμός)

Η νεώτερη θεωρία που αφορά τις μαθησιακές διαδικασίες και ειδικά το **πώς μαθαίνει κάποιος** Έχει να κάνει με **«χτίσιμο της γνώσης»** ή την **«κατασκευή της γνώσης».** Αυτή, δεν πραγματώνεται, ούτε με μεταφορά γνώσεων, ούτε με μεταφορά εμπειριών, αλλά κατακτάται **ενεργητικά** από τον υποκείμενο στη μάθηση. Επίσης η ίδια η γνώση καθ΄ εαυτή, δεν επιτελείται με την ανακάλυψή της απ΄ τον γνώστη ως προϋπάρχουσα, ανεξάρτητη απ΄ αυτόν. Η γνώση πλέον νοείται ως **διαδικασία προσαρμογής στον κόσμο των εμπειριών** κατά παράλληλο και αντίστοιχο τρόπο με την «κοινωνικοποίηση» η οποία νοείται ως η διαδικασία προσαρμογής του ατόμου στην κοινωνία.

Έτσι, όπως ακριβώς η Κοινωνιολογία νοεί την «κοινωνικοποίηση» ως μια ενεργητική διαδικασία ενός ατόμου, όμοια και ο **κονστρουκτιβισμός** εννοεί την γνώση ως **ενεργητικά αποκτούμενη, κατασκευαζόμενη,** και βέβαια ο μονόδρομος γι΄ αυτή τη διαδικασία είναι η κατασκευή της μάθησης μέσα από **διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων**.

Αν δεχθούμε τις προηγούμενες αρχές, είναι φανερό ότι η έκφραση «κατανοώ την έννοια πχ. της απόλυτης τιμής» χάνει την **απόλυτη** σημασία της και το νόημά της προσδιορίζεται από **την ίδια την χρήση της έννοιας μέσα στην ίδια την τάξη, απ΄την ίδια την μαθητική κοινότητα, η οποία και την «νομιμοποιεί»** μέσω της χρήσης της και της ανταλλαγής απόψεων μεταξύ των μαθητών επ΄αυτής.

Η κονστρουκτιβιστική έρευνα, έχει επηρεάσει και την διδακτική πρακτική και την κατεύθυνση της μαθηματικής εκπαίδευσης, αφού μελετά τις **νοητικές παραστάσεις** πάνω στις οποίες χτίζονται οι **έννοιες** ή και τα **«νοητικά αντικείμενα»** που τις παριστούν, Επίσης μελετά **το πώς από αυτές τις έννοιες, με συνεχείς αφαιρέσεις, χτίζονται ανώτερες έννοιες, ανώτερης τάξης**, μια διαδικασία που περιγράφεται με τον όρο **αναστοχαστική αφαιρετική διαδικασία** (reflective abstraction).

Ως παράδειγμα επί των προηγουμένων, αναφέρουμε την έννοια «απόσταση» και την νοητική παράσταση της έννοιας αυτής, η οποία μπορεί να είναι π.χ. μια εικόνα ενός ευθυγράμμου τμήματος (απόσταση μεταξύ δύο σημείων) ή παράσταση - εικόνα ευθυγράμμου τμήματος καθέτου σε ευθεία (απόσταση σημείου από ευθεία). Ως νοητικά αντικείμενα της προηγούμενης έννοιας μπορεί να είναι τα σύμβολα $|\chi|$ (απόλυτη τιμή του χ= απόσταση του αριθμού χ από το Ο) $|\alpha-\beta|$ (: απόσταση των αριθμών α,β) ή $d(\chi,\psi)$ (: γενίκευση της έννοιας απόσταση με χρήση των ιδιοτήτων της μετρικής) ή ακόμα σύνδεση της έννοιας με την έννοια της νόρμας(:$d(\chi,\psi) = \|\chi-\psi\|$) ή ακόμα σύνδεση και μετεξέλιξη της έννοιας «απόσταση» – «νόρμα» –«εσωτερικό γινόμενο» «τετραγωνική μορφή» μέσω των ταυτοτήτων (: νοητικά αντικείμενα)

$d(\chi,\psi) = \|\chi-\psi\|$, $\|\chi\|=\sqrt{T(x)}$, $T(\chi)=E(\chi,\chi)$

όπου η έννοια «απόσταση» έχει έννοια ακόμη και για χώρους όπου δεν υπάρχει εποπτεία (πχ R^{n} , $n>3$) ούτε είναι δυνατόν να υπάρξει επαρκές εποπτικό μοντέλο. (π.χ. αποστάσεις στην Υπερβολική Γεωμετρία).

2. Η ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Γενικά **η ενεργητική διδασκαλία** εστιάζεται στις παρακάτω ενέργειες του καθηγητή όπου η κάθε μία **προϋποθέτει παραδοχή αναλόγων αντιλήψεων** : Έτσι:

Α) Η διδασκαλία εκκινεί με ασυνήθη προβλήματα, χωρίς να έχουν διδαχθεί πριν οι απαραίτητες έννοιες και οι αλγόριθμοι.

- Αυτό σημαίνει, ότι οι μαθητές **μπορούν να λύσουν προβλήματα, ας μην γνωρίζουν τα συνήθως θεωρούμενα εκ των προτέρων «απαραίτητα».**

Β)Το διδακτικό υλικό και η διδασκαλία, προσαρμόζονται με το περιβάλλον της τάξεως τις γνώσεις του καθηγητή και τα ενδιαφέροντα των μαθητών.

- Αυτό σημαίνει ότι τα Μαθηματικά πρέπει να διδάσκονται σε **γνώριμα πλαίσια** των μαθητών και να λαμβάνουν υπ΄ οψιν τους την **γλώσσα** τους, τα **πολιτισμικά τους στοιχεία και την καθημερινότητά τους.**

Γ) Η διδασκαλία γίνεται με πολλαπλές επιλογές εκ μέρους του καθηγητή (εξατομικευμένη διδασκαλία , εργασία σε ομάδες, συζήτηση με όλη την τάξη).

- Αυτό σημαίνει ότι **οι ατομικές διαφορές στη μάθηση απαιτούν διαφορετική οργάνωση της τάξης.**

Δ) Η τάξη γίνεται «μαθηματική κοινότητα» και ο δάσκαλος των μαθηματικών χτίζει και αξιολογεί πάνω στις μεθόδους και λύσεις των μαθητών.

- Αυτό σημαίνει ότι **οι εικασίες που αναπτύσσονται, προωθούν και ελέγχουν την μάθηση**, ο δε δάσκαλος είναι κάθε στιγμή **δεκτικός στις προτάσεις των μαθητών.**

Ε) Η διδασκαλία γίνεται με εστίαση και τονισμό των κεντρικών μαθηματικών εννοιών.

- Αυτό σημαίνει ότι τυποποιημένοι αλγόριθμοι και απομονωμένες περιοχές των μαθηματικών δεν προσφέρονται για παρουσίαση των σημαντικών ιδεών. Αντιθέτως, η **ολιστική αντίληψη** και αντιμετώπιση των μαθηματικών είναι **κεντρική επιλογή της διδασκαλίας**.

Στ) Η χρήση άτυπων μορφών αξιολόγησης, επιδρά στις διδακτικές επιλογές.

- Αυτό σημαίνει **ότι η άμεση παρατήρηση του τρόπου δράσης και σκέψης των μαθητών την στιγμή που εργάζονται** δίνει όλες τις ευκαιρίες **ανάδρασης** στον καθηγητή για την **βελτίωση ή και αλλαγή του τρόπου οργάνωσης της διδασκαλίας.**

Ζ) Οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται σε αναστοχασμό πάνω στις δραστηριότητες και στη μάθηση.

- Αυτό σημαίνει ότι ο **αναστοχασμός είναι απαραίτητο εργαλείο για να γίνει αναθεώρηση, καλλίτερη κατανόηση και διασύνδεση των μαθηματικών εννοιών.**

3. ΤΟ ΓΕΝΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΣΤΙΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.

Η εισαγωγή του κεφαλαίου των γεωμετρικών μετασχηματισμών με διαδικασίες επίλυσης προβλήματος, αλλά και κάθε μαθήματος μαθηματικών γίνεται έτσι ώστε :

Ο ΜΑΘΗΤΗΣ:

- Καλείται **να διαβάσει το πρόβλημα** , να κάνει **διευκρινιστικές ερωτήσεις , να σχεδιάσει** και να **αποτυπώσει** τις πληροφορίες που θα του παρασχεθούν μέσω του προβλήματος.
- Καλείται να εργασθεί μόνος ή καλύτερα καθ'ομάδας .
- Καλείται να **συζητήσει** την λύση του , να εικάσει, να προσπαθήσει να γενικεύσει ή και να **αναλύσει την πορεία** που έχει ακολουθήσει μέχρι την λύση .

- **Να ενθαρρυνθεί σε συμμετοχή στο μάθημα**, μέσα από την **«κατασκευή της γνώσης»** ακόμα και όταν δεν έχει πλήρη ή επαρκή μαθηματική υποδομή. Ήδη παρατηρείται το φαινόμενο της αξιοσημείωτης συμμετοχής «αδύνατων» μαθητών σε διαδικασίες επίλυσης προβλήματος, οι οποίοι – είναι βέβαιον – θα αδιαφορούσαν εάν το μάθημα είχε εισαχθεί με το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας (π.χ δασκαλοκεντρική διδασκαλία). Εξάλλου η

εισαγωγή βασίζεται αυστηρά σε **προϋπάρχουσες** γνώσεις και **η νέα γνώση κτίζεται αποκλειστικά πάνω στις παλιές.**

- **Να ενθαρρυνθεί στην δεξιότητα επίλυσης προβλημάτων**, αφού ο με ιλιγγιώδεις ρυθμούς αναπτυσσόμενος κόσμος μας, απαιτεί **διαρκή προσαρμογή του** κάθε προσώπου μέσα από διαδικασίες επίλυσης προβλήματος στο ευρύτερο και στενότερο εργασιακό του περιβάλλον. Η **δια βίου εκπαίδευση** είναι κάτι που οι παρούσες κοινωνικές αντιλήψεις θεωρούν πλέον ως φυσιολογικό, πρέπον, ευκταίο και επιδιωκόμενο απ΄όλους, ενώ ήδη στις αρχές μόλις της δεκαετίας του ΄80 η φράση «δια βίου εκπαίδευση» ηχούσε ως υπερβολή των διαφόρων φιλοσόφων – μελλοντολόγων της εκπαίδευσης.

- **Να ενθαρρυνθεί σε ομαδική εργασία,** κάτι που μπορεί να γίνει π.χ. με το τέχνασμα της διανομής ενός φύλλου εργασίας ανά δύο μαθητές. Είναι προφανές ότι αυτό συμβάλλει στην κοινωνικοποίηση του κάθε προσώπου και επίσης δρα ως αντίρροπος παράγοντες στην γενική τάση του Έλληνος να δρα κατά μόνας, αφού η εσωστρέφεια και ο εγωκεντρισμός μπορούν να χαρακτηρισθούν ως «εθνικά ελαττώματα».Παράλληλα η νέα γνώση ενσωματώνεται επίσημα **ως γνώση της μαθητικής κοινότητας**.

<u>**Ο ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ :**</u>

Επωμίζεται με την ευθύνη της **προσεκτικής σχεδίασης καταστάσεων δράσης, διατύπωσης, επικοινωνίας επικύρωσης ,απόφασης και εν τέλει θεσμοποίησης της νέας γνώσης.** Σ' αυτό το σχεδιασμό του θα πρέπει να λάβει πρόνοια να μην περιπέσει σε σχήμα κατά το οποίο η νέα γνώση προκύπτει «φυσιολογικά» και «αναμενόμενα» ή παράγεται μέσω τεχνασμάτων .

- Δεν είναι «μεταφορέας γνώσης», δεν παίζει – επιδεικνύει το «σόλο» του ενώπιον των μαθητών του, αλλά διευθύνει με την μπαγκέτα του, το προς κατάκτηση γνωστικό αντικείμενο.
- **Παρουσιάζει** το πρόβλημα στην τάξη , απαντά σε **διασαφητικές ερωτήσεις κατανόησης**
- και οργανώνει τους μαθητές .
- **Ενθαρρύνει επιβραβεύει πατοτρύνει και καθοδηγεί διακριτικά** τους μαθητές, ομιλεί στον ελάχιστο δυνατό βαθμό και **εκμαιεύει** τις νέες έννοιες.
- Ενθαρρύνει την συζήτηση **όλων των ιδεών** που αναπτύσσονται μεταξύ των μαθητών .
- Ενεργοποιεί τα γνωστικά σχήματα των μαθητών μέσω γενικών ή ειδικών ευρετικών, ώστε να μπορούν να αναγνωρίζουν πρότυπα ή μοντέλα να **διατυπώνουν εικασίες, να τις αξιολογούν**, να είναι σε θέση να **καταστρώνουν ένα σχέδιο** και να το εκτελούν.
- Προκαλεί τροποποίηση υπάρχοντος γενικού σχεδίου του μαθητή ή τον βοηθάει να δημιουργήσει νέο.

- Καλείται να αντιμετωπίσει τα γνωστικά ή επιστημολογικά εμπόδια που ίσως παρουσιασθούν στην τάξη από τους μαθητές.
- Να υποστηρίξει κάθε προσπάθεια **γενίκευσης του προβλήματος** .

- Καλείται να προβάλλει στους μαθητές του την ιδέα ότι τα μαθηματικά είναι μια <u>ανθρώπινη καθημερινή κοινωνική δραστηριότητα η οποία εκφράζεται με κάποια συμβολική γλώσσα, ενώ είναι ένα οικοδόμημα με εσωτερική συνέπεια λογικά δομημένο και κοινωνικά αποδεκτό.</u>

- Να παρουσιάσει την μαθηματική γνώση εν τω γενάσθαι και εν τω γίγνεσθαι στους μαθητές, και όχι φιλτραρισμένη συνθετοποιημένη προεπεξεργασμένη, προταξινομημένη, όπου μέσα

από τέτοια παρουσία (ορισμός – θεώρημα -απόδειξη) **να χάνεται η διαδικασία δημιουργίας τους** και η εφαρμογή τους.

- Να εθίσει τους μαθητές **σε ενεργητικές μεθόδους διδασκαλίας** κόντρα στο παραδοσιακό πρότυπο, το οποίο να επιτρέπει ανάπτυξη φαινομένων παθητικότητας και ανίας στους θεατές-ακροατές μαθητές .

- Να μη δίνει το κύρος στη νέα γνώση ο ίδιος ο διδάσκων, αλλά η ίδια η γνώση να αποκτά **υπόσταση κύρος και ισχύ μέσα από την (καθοδηγούμενη) ανακάλυψή της** από την μαθητική κοινότητα.

4. *ΕΙΔΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΣΤΙΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΣΤΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΜΕ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ*

Ο ΜΑΘΗΤΗΣ:

- Στην αρχή καλείται **να αναγνωρίσει** και **να ανακαλέσει** από την μνήμη του την εξίσωση κύκλου την οποία γνωρίζει από Β΄ Λυκείου.**Έτσι η νέα γνώση θα κτισθεί στα θεμέλια της παλαιάς.**

- Καλείται **στην αρχή να κάνει μόνος του** μία απλή γεωμετρική διαδικασία που θα τον **εισάγει** στην νέα έννοια.Η διαδικασία αυτή σταθμημένη έτσι ώστε να είναι δυνατή από το σύνολο των μαθητών.

- Καλείται να **ανακαλύψει** τη σχέση που συνδέει τις νέες συντεταγμένες που ο ίδιος προσδιόρισε, με τις παλιές.

- Ο μαθητής που τέλειωσε πρώτος ή όσοι τελείωσαν πρώτοι**, ενθαρρύνονται** να επιδεικνύουν την λύση τους σε αδύνατους μαθητές στο ίδιο, εμπρός ή πίσω θρανίο**, βοηθώντας τους**.

- Καλείται **ελεύθερα να εκφράσει εικασίες** για το τι είδους μεταβολή υπέστη ο κύκλος μέσω της εργασίας του και **να εικάσει το είδος του νέου σχήματος**.

- Καλείται **με την μαιευτική μέθοδο να ανακαλύψει τον ορισμό του γραμμικού μετασχηματισμού** ως «απεικόνιση» μια έννοια την οποία γνωρίζει από πριν περιορισμένα. Έτσι καλείται **να διευρύνει το αντίστοιχο γνωστικό σχήμα** σύμφωνα με το οποίο έχει καταχωρίσει την έννοια «απεικόνιση» και «συνάρτηση». Το ίδιο ισχύει για τις προϋπάρχουσες έννοιες «πίνακας», «πολ/σμός πινάκων» σε σχέση με την χρησιμότητά τους και το πεδίο εφαρμογών τους. Δηλ. ένας «γραμμικός μετασχηματισμός» παριστάνεται ισοδύναμα μέσω ενός «γραμμικού συστήματος» το οποίο με τη σειρά του ισοδυναμεί με μία ισότητα γινομένου πινάκων με κάποιο πίνακα.
  Ακόμα έχουμε σημαντική **διεύρυνση του γνωστικού σχήματος** «συνάρτηση –άρτια-περιττή αντίστροφη ,συμμετρία ως προς ευθεία και σημείο» σε σχέση με τους γραμμικούς μετασχηματισμούς μέσω της οπτικοποίησης με διανυσματική τεχνική που θα παρουσιαστεί στοτέλος. Με τον ανακαλυπτόμενο μνημονικό κανόνα διευκολύνεται στην **ανάκληση** όλων των πινάκων των γραμμικών μετασχηματισμών.

<u>Ο ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ :</u>

- Ομιλεί μόνο για να **διευθύνει το μάθημα** με φράσεις του τύπου: «διαπραγματευτείτε το 1^{o} ερώτημα», «πόσοι τελειώσατε», «βοηθήστε τους διπλανούς σας», «βρήκατε όλοι αυτό» , «διαπραγματευτείτε το 2^{o} ερώτημα» κ.τ.λ.

- **Επιβραβεύει λεκτικά ιδίως τους αδύνατους** που διαπραγματεύονται κάποιο ερώτημα. Η δυσκολία των ερωτήσεων και η κλιμάκωσή τους εγγυώνται, ότι οπωσδήποτε **στις πρώτες θα απαντήσουν όλοι οι μαθητές.** Όσον αφορά στην εύρεση του πίνακα των γνωστών γραμμικών μετασχηματισμών, αναμένεται ομαλή απόκριση απ΄ το σύνολο της κάθε τάξης. Αν υπάρξει δυσκολία, θα αφορά την εύρεση του πρώτου πίνακα του πρώτου στη σειρά γραφικού μετασχηματισμού.

- **Εκμαιεύει τον ορισμό του γεωμετρικού μετασχηματισμού**. Αμέσως μετά δείχνει την διαφάνεια με το πλέγμα και την παραμόρφωσή του μετά τους σεισμούς , καθιστώντας έτσι τον ορισμό **άμεσα εφαρμόσιμο στην ζωή μας σε ένα από τα πραγματικά προβλήματα του κόσμου μας.**

- Στην διδασκαλία τους της 2^{ης} ενότητας (στροφή) ίσως μπορεί **να ενεργοποιήσει μια ειδική ευρετική στους μαθητές για** τα Α) και Β) ερωτήματα λέγοντας «θυμηθείτε τριγωνομετρικό κύκλο ή ανάλυση δυνάμεως σε δύο συνιστώσες) για όσους μαθητές δεν το έχουν βρει .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1.ΚΛΑΟΥΔΑΤΟΣ ΝΙΚΟΣ:(1996)ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

2. POLYA GYORGY: (1991) «ΠΩΣ ΝΑ ΤΟ ΛΥΣΩ» ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΡΔΑΜΗΤΣΑ ΑΘΗΝΑ.

3.J .M .HEALY : «ΜΥΑΛΑ ΠΟΥ ΚΙΝΔΥΝΕΥΟΥΝ» ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΛΥΧΝΟΣ

4 . ΚΛΑΟΥΔΑΤΟΣ ΝΙΚΟΣ : (1997) ΕΙΣΗΓΗΣΗ ΣΕΜΙΝΑΡΙΟΥ «ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑ-ΘΗΜΑΤΙΚΩΝ».

5. ΜΙΧ. Ι . ΚΑΣΣΩΤΑΚΗ-ΓΕΩΡ. Σ ΦΛΟΥΡΗ «ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ».

6.ΘΕΟΔ.Γ.ΕΞΑΡΧΑΚΟΥ(1988) «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ» ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

(Χαρακτηριστική Λυτικής προβλήματος)

Εκλογικά συστήματα

Σκοπός των εκλογικών συστημάτων είναι να απεικονίσουν όσο γίνεται πιο πιστά τη θέληση του εκλογικού σώματος. Θεωρούμε τρία εκλογικά συστήματα 1) το πλειοψηφικό, 2) το σύστημα Borda, 3) το σύστημα Hare.

Έστω ότι υπάρχουν 3 υποψήφιοι A, B, C. Στο 1ο εκλέγεται ο υποψήφιος με τις περισσότερες ψήφους, στο 2ο κάθε εκλογέας κατατάσσει τους υποψηφίους πρώτο, δεύτερο και τρίτο. Υπολογίζεται η μέση κατάταξη καθενός και ο έχων το μεγαλύτερο βεβαρημένο μέσο όρο κερδίζει. Στο 3ο πάλι κάθε εκλογέας κατατάσσει πρώτο, δεύτερο και τρίτο τους υποψήφιους. Εάν κανένας υποψήφιος δεν συγκεντρώσει την απόλυτη πλειοψηφία από πρωτιές τότε ο υποψήφιος με τις λιγότερες πρωτιές αποκλείεται και οι πρωτιές του δίνονται σε εκείνο τον υποψήφιο που έχει καταταγεί δεύτερος σε πρωτιές. Τα αποτελέσματα μιας ψηφοφορίας δίνονται στον παρακάτω πίνακα

Κατάταξη	Αριθμός ψηφοδελτίων
ABC	10
ACB	4
BAC	2
BCA	7

CAB	3
CBA	7

Να εξαχθούν τα αποτελέσματα με κάθε εκλογικό σύστημα.

Βιβλιογραφία:

Simson + Growney

Ίδρυμα Ευγενίδη 510.76G

Σημείωση: Ένα θεώρημα του K. Arrow αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει τέλειο εκλογικό σύστημα : «Κάθε σύστημα μπορεί να μαγειρευτεί».

Δώστε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Ι. Α Σύστημα

Στο πρώτο σύστημα η κατάταξη των υποψηφίων γίνεται με βάση τους αριθμούς των ψήφων που τους δίνουν πρώτη θέση στην τριάδα.

Άρα με το πρώτο σύστημα η κατανομή των νικητών είναι η εξής:

1^{ος} ο Α υποψήφιος με 14 ψήφους για την 1^{η} θέση

2^{ος} ο Γ υποψήφιος με 10 ψήφους για την 1^{η} θέση

3^{ος} ο Β υποψήφιος με 9 ψήφους για την 1^{η} θέση

ΙΙ. Β Σύστημα

Έστω $\alpha_i=(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$ η διατεταγμένη τριάδα που δηλώνει το πλήθος των ψήφων που παίρνει ο ι ($1\leq i\leq 3$) υποψήφιος για την j ($1\leq j\leq 3$) θέση .

Τότε ο πίνακας

$$\Pi=\left[\alpha_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 14 & 5 & 14 \\ 9 & 17 & 2 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}\begin{matrix} \mathrm{A}\,\upsilon\pi o\psi\acute{\eta}\varphi\iota o\varsigma \\ \mathrm{B}\,\upsilon\pi o\psi\acute{\eta}\varphi\iota o\varsigma \\ \Gamma\,\upsilon\pi o\psi\acute{\eta}\varphi\iota o\varsigma \end{matrix}$$

Εκφράζει την κατανομή των ψήφων κάθε υποψηφίου για την j θέση ($1\leq j\leq 3$)

Θεωρούμε μία συγκεκριμένη διατεταγμένη τριάδα βαρών

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ =(3,2,1) έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο $[\alpha_i,\beta]$ να εκφράζει το σύνολο των ΄΄βαθμών΄΄ που παίρνει ο i υποψήφιος.

Τότε ο μέσος όρος των βαθμών των τριών υποψηφίων δίνεται από τον πίνακα

$$M = \frac{1}{33}\Pi.B = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 14 & 5 & 14 \\ 9 & 17 & 2 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 68/33 \\ 64/33 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, με το δεύτερο σύστημα και την τριάδα βαρών B=(3,2,1) η τελική κατάταξη των υποψηφίων είναι η εξής:

1^{ος} ο Β υποψήφιος με μέσο όρο (68/33) > 2

2^{ος} ο Α υποψήφιος με μέσο όρο 2

3^{ος} ο Γ υποψήφιος με μέσο όρο (64/33) < 2

Τρίτο σύστημα

Σύμφωνα με το πρώτο σύστημα, ο υποψήφιος Β (ο οποίος έχει τις λιγότερες ΄΄πρωτιές΄΄), αποκλείεται από την κατανομή και οι ΄΄πρωτιές΄΄ του δίνονται στον υποψήφιο Γ. Τότε η κατάταξη γίνεται ως εξής:

ABC	10
ACB	4
BAC	0
BCA	0
CAB	5
CBA	14

Θεωρήσαμε ότι τα ψηφοδέλτια της μορφής BAC προσμετρούνται στα ψηφοδέλτια της μορφής CAB και τα ψηφοδέλτια της μορφής BCA προσμετρούνται στα ψηφοδέλτια της μορφής CBA.

Συνεπώς, σύμφωνα με:

- Το πρώτο σύστημα η κατανομή των νικητών είναι η εξής:

1^{ος} ο Γ υποψήφιος με 19 ψήφους για την 1^{η} θέση,

2^{ος} ο Α υποψήφιος με 14 ψήφους για την 1^{η} θέση

- Το δεύτερο σύστημα, και θεωρώντας ως διατεταγμένη τριάδα βαρών $B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$=(3,2,1), ο μέσος όρος των βαρών των υποψηφίων Α και Γ, δίνεται από τον πίνακα

$$M'=\frac{1}{33}\begin{bmatrix}14 & 5 & 4\\ 19 & 4 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}56/33\\ 75/33\end{bmatrix}$$

Άρα η κατανομή των νικητών, είναι η εξής:

1^{ος} ο υποψήφιος Γ με μέσο όρο 75/33

2^{ος} ο υποψήφιος Α με μέσο όρο 56/33

ΙΙ. Παρατηρούμε ότι με το δεύτερο σύστημα, αν θεωρήσουμε μία τυχαία τριάδα βαρών $b=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}$, τότε τα εσωτερικά γινόμενα $[\alpha_i,\beta]$ και κατά συνέπεια οι αντίστοιχοι μέσοι όροι των ψήφων για κάθε υποψήφιο α_i, εξαρτώνται από το συν(α_i,β).

Συγκεκριμένα κάθε εσωτερικό γινόμενο $[\alpha_i,\beta]$ παίρνει μέγιστη τιμή την $|\alpha_i|\,|\beta|$, αν και μόνο αν συν$(\alpha_i,\beta)=1$.

Συνεπώς κατάλληλη επιλογή του διανύσματος $b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$

μπορεί να μεταβάλλει την τιμή των εσωτερικών γινομένων $[\alpha_i, \beta]$ για

$1 \leq i \leq 3$, δηλαδή το δεύτερο σύστημα.

Παρόμοια και για το τρίτο σύστημα.

Επίλεκτα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα για την διδασκαλία εννοιών του Απειροστικού Λογισμού

Του Γιάννη Π. Πλατάρου
M.edu Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών



Εκτός από τις προτάσεις και τα θεωρήματα των μαθηματικών, στα καλά διδακτικά βιβλία, υπάρχουν παράλληλα κάποιες παρατηρήσεις των συγγραφέων που τιτλοφορούνται είτε ως **«Σχόλιο»** είτε ως **«παρατήρηση»** είτε ως **«προσοχή!»** είτε ως **«επισήμανση»** Όλες αυτές οι καταγραφές, είτε ως **υποσημειώσεις** στο περιθώριο της σελίδας, είτε ως **σημειώσεις μέσα σε ξεχωριστό πλαίσιο** για να δοθεί αναγκαία έμφαση, **διευκρινίζουν σκοτεινά σημεία της θεωρίας,** σημεία στα οποία ο **αναγνώστης εύκολα μπορεί να κάνει λάθος**, είτε **εύκολα να παρανοήσει**. Η εμπειρία του συγγραφέως, ο οποίος κατά κανόνα είναι και δάσκαλος των μαθηματικών, του επιβάλλει να πει το κάτι παραπάνω, κάτι το εμφαντικό, αυτό που ίσως προλάβει ένα πιθανό λάθος, μια λανθασμένη νοητική εικόνα, καθοδηγούμενος από τις εμπειρίες , τις προσωπικές του , των μαθητών του , αλλά και από μια τεράστια βιβλιογραφία που έχει σχηματισθεί από συζητήσεις της μαθηματικής κοινότητας για **«συνήθη λάθη»** , **«συνήθεις παρανοήσεις»**, **γνωστά ιστορικά λάθη**, **«επιστημολογικά εμπόδια»** που κατά την διδασκαλία τα λέμε και **«διδακτικά εμπόδια».**

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε, επίλεκτα παραδείγματα που υπακούουν στα προηγούμενα και πιστεύουμε, ότι θα είναι χρήσιμα σε κάθε μαχόμενο συνάδελφο του πίνακα για να τα έχει ως άμεσα όπλα απόδειξης πειθούς και πρόληψης λανθασμένου νοητικού μοντέλου για κάποια λεπτή έννοια, κατά την διαδικασία δόμησης της γνώσης των μαθητών του.

Τα παραδείγματα που παρουσιάζουμε, βαίνουν κλιμακωτά και καλύπτουν όλο το φάσμα του Απειροστικού Λογισμού που διδάσκεται στην Γ' Λυκείου ,με κάποιες μικρές παρεκβάσεις. Ας μην ξεχνάμε, ότι η Ανάλυση της Γ' Λυκείου, εξετάζει τις συναρτήσεις που ορίζονται **μόνο** σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Αυτός ο περιορισμός , αφήνει απ' έξω όλες τις άλλες συναρτήσεις. Επίσης, η έννοια της συνέχειας έχει νόημα έτσι όπως ορίζεται, μόνο σε σημεία συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, ενώ και οι έχουσες μεμονωμένα σημεία συναρτήσεις , σύμφωνα με τους ορισμούς των Πανεπιστημιακών συγγραμμάτων είναι συνεχείς (λ.χ. όλες οι ακολουθίες, είναι συνεχείς συναρτήσεις) Αυτό το θέμα , ναι μεν δεν το αγγίζουμε, αλλά πρέπει να το έχουμε κατά νου , προς αποφυγήν λανθασμένων γενικεύσεων, όπως θα δούμε σε ορισμένα παραδείγματα παρακάτω:

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ . ΡΗΤΟΙ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΟΙ.

Είναι αληθές, ότι κάθε πραγματικός αριθμός, έχει μονοσήμαντη δεκαδική αναπαράσταση;

Απάντηση: Δεν είναι αληθές. Κάθε άρρητος, έχει πράγματι μονοσήμαντη δεκαδική αναπαράσταση, την οποία όμως γνωρίζει μόνον ο …Θεός! Όσον αφορά όμως τους ρητούς, έχομε, ότι κάθε ρητός, έχει δύο ισοδύναμες δεκαδικές αναπαραστάσεις. Παραδείγματα:

$2 = 1,9999...$ ή 17,23999999999….=17,24

Η απόδειξη των παραπάνω, μπορεί να γίνει είτε με μαθηματικά της Β' Γυμνασίου είτε της Β' Λυκείου

λ.χ.: Αν $\alpha = 1,99999......$ τότε

$10\alpha = 19,99999 \Rightarrow 9\alpha = 18,00000... \Rightarrow \alpha = 2$ **Ή 17,23999…=17,23+**

$$\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}+.... \underset{\varphi\theta.\gamma\varepsilon\omega\mu.\pi\rho\acute{o}\delta o\varsigma}{=} 17,23+\frac{\frac{9}{10^3}}{1-\frac{1}{10}} = 17,23+\frac{9}{10^4} = 1,24$$

Να δοθούν παραδείγματα , όπου:
i) άρρητος + άρρητος = ρητός ii) άρρητος – άρρητος = ρητός iii) άρρητος άρρητος = ρητός iv) άρρητος : άρρητος = ρητό

Απάντηση:

i) $(\sqrt{2})+(2-\sqrt{2}) = 2$ ii) $(\sqrt{2}+2)-(\sqrt{2}) = 2$ iii) $(\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{2}) = 4$ iv) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

Στα παραπάνω, θεωρείται γνωστό, ότι $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Πέραν των προηγουμένων παραδειγμάτων, υπάρχει και η κατασκευαστική λογική, όπως παρακάτω:

i) Αν $\alpha = 1,1010010001000010000010000001...$ τότε ο α είναι άρρητος αφού έχει απειροψήφια μη περιοδική παράσταση.
Ομοίως ο $\beta = 1,0101101110111101111110...$ είναι άρρητος για τον ίδιο λόγο.
Και $\left.\begin{aligned}\alpha+\beta &= 2,111111...\\ 10(\alpha+\beta) &= 21,111111...\end{aligned}\right\} \Rightarrow$ (με αφαίρεση κατά μέλη)

$$9(\alpha+\beta) = 19 \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{19}{9} \text{ (ρητος)}$$

ii) Αν $\alpha = 2,1010010001000010000001...$ (άρρητος)
$\beta = 1,1010010001000010000001...$ (άρρητος)
Τότε $\alpha-\beta = 1$ (ρητός).

iii) Αφού $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$ και το ανάπτυγμα του $\sqrt{2}$ θεωρείται «γνωστό»[1], τότε $0,4142...\cdot 2,4142... = 1$.

---

[1] « Γνωστό» υπό την έννοια ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε οποιοδήποτε αρχικό πεπερασμένο τμήμα των άπειρων ψηφίων του, με πεπερασμένα βήματα. Το σύνολο των θέσεων των ψηφίων του δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε (πλην του…Θεού!) γι' αυτό άλλωστε ονομάζεται και *άρρητος* (= δεν μπορεί να εκφρασθεί). Αλλά είδαμε ότι υπάρχουν και άρρητοι που "εκφράζονται", όπως ο α και ο β των παραδειγμάτων που έχουν μια **τυπική κανονικότητα** στα άπειρα μη περιοδικά ψηφία τους.

iv) Έχω ότι: $1 = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα, γνωστού όντος του αναπτύγματος του $\sqrt{2}$, είναι γνωστό και το $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ που προκύπτει με τον αλγόριθμο (απείρων βημάτων όμως!) της διαίρεσης με το 2 και άρα $1,4142...\ x\ 0,707... = 1$.

Είναι αληθές ότι οι πλέον συνηθισμένοι ρητοί αριθμοί που υπάρχουν είναι οι δεκαδικοί τερματιζόμενοι που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή;

<u>Απάντηση:</u> Όχι. Όλοι οι δεκαδικοί τερματιζόμενοι είναι οι ρητοί της μορφής $\frac{\alpha}{2^{\mu}\cdot 5^{\nu}}$, με μ,ν στο ℕ και $(\alpha, 2^{\mu}\cdot 5^{\nu}) = 1$ **και μόνον *αυτοί.***

Πράγματι: Αν υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι μ>ν , τότε, $\frac{\alpha}{2^{\mu}\cdot 5^{\nu}} = \frac{\alpha\cdot 5^{\mu-\nu}}{2^{\mu}\cdot 5^{\nu}\cdot 5^{\mu-\nu}} = \frac{\alpha\cdot 5^{\mu-\nu}}{2^{\mu}\cdot 5^{\mu}} = \frac{\alpha\cdot 5^{\mu-\nu}}{10^{\mu}}$ Το τελευταίο κλάσμα, γράφεται ως δεκαδικός τερματιζόμενος κατά τα γνωστά, μετρώντας μ θέσεις για την υποδιαστολή, αριστερά του τελευταίου ψηφίου του ακέραιου $\alpha\cdot 5^{\mu-\nu}$.

Αντιστρόφως: Κάθε δεκαδικός, γράφεται ως άθροισμα κλασμάτων με παρονομαστή δύναμη του 10 , όπου αν κάνω την άρθροιση, θα έχω κλάσμα με παρονομαστή δύναμη του 10 και οι όροι θα είναι πρώτοι μεταξύ τους. Το αντίστροφο συμπληρώνεται, με την απόδειξη, ότι το αρχικό κλάσμα δεν μπορεί να είναι ισοδύναμο με άλλο που να έχει ο παρονομαστής άλλη ανάπτυξη πρώτων, λόγω της μοναδικότητας ανάπτυξης κάθε ακεραίου σε γινόμενο πρώτων. Έτσι έχομε, ότι η κλάση των δεκαδικών , ως σύνολο είναι μεν απειροσύνολο (στην ζωή μας πάντα πεπερασμένο) αλλά ως κλάση των ρητών αποτελεί μια απειροστή κλάση αυτών, πράγμα που διαισθητικά γίνεται αντιληπτό από τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο παρονομαστής καθώς μπορεί να διατρέξει όλους τους συνδυασμούς των απείρων το πλήθος, πρώτων.

Ως διαισθητική προσέγγιση, μπορούμε να πούμε, ότι αν πάρουμε ένα πρότυπο μέτρο μήκους , που να παριστάνει το διάστημα [0,1], όταν το χωρίζουμε σε 10, 100, 1000, κ.ο.κ. κομμάτια, εκεί έχουμε θέσεις δεκαδικών τερματιζόμενων και παντού αλλού μη τερματιζομένων κα αρρήτων[2].

Εν κατακλείδι έχουμε:

Δεκαδικοί τερματιζόμενοι: $\frac{\alpha}{2^{\mu}\cdot 5^{\nu}},\ \begin{matrix}\alpha\in\mathbb{Z}\\ \mu,\nu\in\mathbb{N}, \mu\varepsilon\ (\alpha, 2^{\mu}\cdot 5^{\nu})=1\end{matrix}$

Ρητοί : $\frac{\alpha}{\beta},\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z}\ \kappa\alpha\iota\ \beta\neq 0$.

Μπορούμε να πούμε (διαισθητικά πάντα) ότι «**Σχεδόν όλοι οι ρητοί, είναι δεκαδικοί περιοδικοί».**

---

[2] Κατά την γνώμη μας, καλό θα ήταν ο διδάσκων να πει δύο πράγματα για τα απειροσύνολα, την απαρίθμηση και το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor, για να δείξει την ποιοτική διαφορά του απείρου της αριθμησιμότητας των ρητών και του υπεραριθμησίμου των αρρήτων. Μπορούν να παρουσιασθούν σε μια διδακτική ώρα, ακόμα και στην Α΄ Λυκείου, όσο κι αν φαίνεται λίγο τολμηρό , αρκεί να υπάρχει ο κατάλληλος σχεδιασμός.

ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Εάν δύο συναρτήσεις έχουν ταυτόσημες αναλυτικές εκφράσεις (: τύπους) είναι ίσες;

Απάντηση: Όχι απαραιτήτως. π.χ.:

$f(x) = 2x/\{-1,0,1\}$ και $g(x) = 2x/[-1,1]$

Προφανώς $f \neq g$ αφού $\mathcal{D}(f) \neq \mathcal{D}(g)$

Εάν δύο συναρτήσεις έχουν διαφορετικές αναλυτικές εκφράσεις (: τύπους) είναι πάντα διαφορετικές;

Απάντηση: Όχι απαραιτήτως. π.χ.

$f(x) = 2x/\{-1,0,1\}$ και $g(x) = 2x^3/\{-1,0,1\}$

Ισχύει $f = g$, ενώ οι αναλυτικές εκφράσεις είναι διαφορετικές.

Εάν $f(x)\cdot g(x) = 0 \ \forall x \in A$, όπου A το κοινό πεδίο ορισμού των f,g, τότε μια τουλάχιστον από τις f,g είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση;

Απάντηση: Όχι απαραιτήτως. π.χ.

Αν $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 0 & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$

τότε $f(x)\cdot g(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ χωρίς καμία να είναι σταθερή.

Επιπλέον, το αντιπαράδειγμα των f,g είναι τέτοιο ώστε να πληροί και την επιπρόσθετη προϋπόθεση ότι **«δεν υπάρχει υποδιάστημα στο πεδίο ορισμού της f είτε της g που ο περιορισμός της f ή της g αντιστοίχως, να είναι η μηδενική συνάρτηση».**

Να αποδειχθεί η ισχύς ή η μη ισχύς εν γένει, των ισοτήτων:

α) $f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$

β) $(g+h)\circ f = g\circ f + h\circ f$

όπου f,g,h**:συναρτήσεις** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Απάντηση: **Η α) δεν ισχύει πάντα, ενώ η β) ισχύει πάντα! Πράγματι:**

α) Αν θεωρήσω: $f(x) = x^2$, $h(x) = 1$, $g(x) = 1$. Τότε

$[f\circ(g+h)](x) = f(g(x)+h(x)) = f(1+1) = f(2) = 2^2 = 4$

$[(g+h)\circ f](x) = (g+h)(f(x) = (g+h)(x^2) = g(x^2)+h(x^2) = 1^2+1^2 = 2$.

β) Ισχύει πάντα: Πράγματι, $\forall x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$[(g+h)\circ f](x) = (g+h)(f(x)) = g(f(x))+h(f(x))$

$= h(f(x))+g(f(x)) = (h+g)(f(x)) = [(h+g)\circ f](x)$

Να παρατεθούν εκφράσεις με όρια, οι οποίες στερούνται νοήματος ορίου, λόγω μορφής του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων.

Απάντηση: α) Η έκφραση $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha x^2 - x + 1} - x\right)$, $\alpha < 0$ δεν έχει νόημα ορίου, διότι το τριώνυμο $\alpha x^2 - x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 4\alpha > 0$ άρα έχει δύο διακεκριμένες ρίζες πραγματικές , ρ_1, ρ_2, και η συνάρτηση έχει π.ο. $\mathcal{D}(f) = [\rho_1,\rho_2]$. Το $-\infty$ δεν είναι σ.σ. του $\mathcal{D}(f)$, άρα δεν έχει νόημα ορίου η έκφραση $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha x^2 - x + 1} - x\right)$, $\alpha < 0$.

β) Αν $f:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x-a}$,

τότε: η έκφραση $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ δεν έχει νόημα, διότι το -∞ δεν είναι σ.σ. του $\mathcal{D}(f)$.

γ) Αν $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-3x+2}$, τότε για να ορίζεται η συνάρτηση, πρέπει $(x-1\geq 0)$ και $x^2-3x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\in\{1\}\cup[2,+\infty)=\mathcal{D}(f)$.

Η έκφραση $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ στερείται νοήματος, διότι το 1 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της.

δ) Αν $f(x)=\log\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}$. Η έκφραση $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ επίσης στερείται νοήματος, διότι $\mathcal{D}(f)=(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$ και το 1 δεν ανήκει στο πεδίο του ορισμού της.

Τα παραπάνω παραδείγματα, εξηγούν πειστικά, γιατί η πρώτη μας ενέργεια πριν την εύρεση ενός ορίου, είναι η εύρεση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Ένας φοιτητής που προγυμνάζει έναν υποψήφιο, του δίνει την εξής ρητή οδηγία: «Πριν ασχοληθούμε με τον υπολογισμό ενός ορίου του τύπου $x\to a\in\mathbb{R}$, η πρώτη μας δουλειά είναι να δοκιμάσουμε αν υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης για χ=α»
Κατά πόσον είναι εύστοχη η υπόδειξή του;

Απάντηση: Είναι λανθασμένη. Η πρώτη μας δουλειά είναι να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το κατά πόσον το α είναι ή όχι σ.σ. του πεδίου ορισμού της f .

Στην περίπτωση γ) του προηγούμενου ζητήματος, για χ=1 έχω f(x)=0. Παρ' όλα αυτά, ο όριο της f στο 1 , δεν έχει νόημα.

Να αποδειχθεί ότι <u>όλες</u> οι παρακάτω προτάσεις είναι ψευδείς!
Αν τότε .
Αν η f δεν ορίζεται για , τότε το δεν υπάρχει.
Αν και , τότε .
Αν , τότε και .
(v) Αν που ανήκουν στο κοινό πεδίο ορισμού τους , και , τότε .

Απάντηση: (i) Δεν είναι αληθής.

π.χ. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ και $f(0)=0\neq\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(ii) Δεν είναι αληθής.

π.χ. $:f(x)=\dfrac{1}{x^2}/\mathbb{R}-\{0\}$

Στο 0 η f δεν ορίζεται, όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

(iii) Δεν είναι αληθής.

π.χ. $f(x) = \frac{2}{x^2}, g(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = 0$

Τότε: $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right] =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty \neq 0$.

(iv) Δεν είναι αληθής.

π.χ. $f(x) = \begin{cases} 1, \text{αν} & x \in [0,1] \\ -1, \text{αν} & x \in [-1,0) \end{cases}$, $|f(x)| = 1 \quad \forall x \in [-1,1]$.

$\lim_{x\to 1}|f(x)| = 1$ ενώ το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.

(v) $f(x) = 0 \,/\, (0,+\infty)$, $g(x) = x^2 \,/\, (0,+\infty)$ $f(x) < g(x) \quad \forall x \in (0,+\infty)$, αλλά $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι ψευδής:
«Αν μια συνάρτηση *f* είναι ασυνεχής στο x_0 τότε και ο περιορισμός της *f* σε κάθε διάστημα που περιέχει το x_0 θα είναι επίσης ασυνεχής».

<u>Απάντηση</u>: Για τη συνάρτηση *f*:

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν} \quad x < 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x \geq 0 \end{cases}$ έχω $\lim_{x\to 0} f(x) = -1 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$.

Δηλαδή η *f* δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά αν θεωρήσω τον περιορισμό $g = f \,/\, [0,+\infty)$ έχω ότι

$\lim_{x\to 0} g(x) = 1 = g(0)$.

Επομένως, η πρόταση είναι ψευδής.

Να αποδείξετε με κατάλληλα αντιπαραδείγματα ότι η προϋπόθεση της συνέχειας της f στο $[\alpha,\beta]$ στο θεώρημα Bolzano, είναι ουσιώδης ώστε να ισχύει το συμπέρασμά του.
Συγκεκριμένα:
(i) **Η υπόθεση της συνέχειας της f στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ απολύτως αναγκαία**
(ii) **Επίσης η συνέχεια στα άκρα *α* και *β*.**

<u>Απάντηση</u>: Η προϋπόθεση της συνέχειας της f στο $[\alpha,\beta]$ είναι ουσιώδης, διότι έστω και σε ένα σημείο x_0 του $[\alpha,\beta]$ να μη είναι συνεχής η *f*, είναι δυνατόν να μην ισχύει το συμπέρασμα της ύπαρξης ρίζας της $f(x) = 0$ στο $[\alpha,\beta]$.

(i) Έστω $f : f(x) = \begin{cases} -2, & \text{αν} \quad x \in [-1,0) \\ 1, & \text{αν} \quad x = 0 \\ 2, & \text{αν} \quad x \in (0,1] \end{cases}$ -

Για την *f* ισχύουν:

- Είναι ορισμένη στο κλειστό $[-1,1]$
- $f(-1)\cdot f(1) = (-2)(+2) = -4 < 0$

- Είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$, αφού

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = +2 \neq 1 = f(0)$

- Είναι συνεχής $\forall\, x_0 \in [-1,1]\setminus\{0\}$.

Όμως $\nexists\, x \in [-1,1] : f(x) = 0$ μιας και η f εξ ορισμού είναι διάφορη του μηδενός για κάθε $x \in [-1,1]$.

(ii) Για την ασυνέχεια στα άκρα:

Θεωρώ την συνάρτηση $g : g(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν} \quad x \in [-1,1) \\ -2, & \text{αν} \quad x = 1 \end{cases}$.

Για την g ισχύουν:

- Είναι ορισμένη στο $[-1,1]$
- $f(-1)\cdot f(1) = 2\cdot(-2) = -4 < 0$
- Είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$, διότι $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq -2 = f(1)$
- Είναι συνεχής $\forall\, x \in [-1,1)$.

Όμως (επίσης εξ ορισμού) $f(x) \neq 0 \;\forall\, x \in [-1,1]$.

Ανάλογο αντιπαράδειγμα μπορούμε να παραθέσουμε και για ασυνέχεια στο αριστερό άκρο του διαστήματος.

Υπάρχει παράδειγμα συναρτήσεως που δεν πληροί τις συνθήκες της υποθέσεως του Θ. Bolzano, «*στον μέγιστο δυνατό βαθμό*» ενώ παράλληλα , πληροί το συμπέρασμα, επίσης «*στον μέγιστο δυνατό βαθμό*».

Απάντηση: «Ιδανικό παράδειγμα» αποτελεί η συνάρτηση του Dirichlet.

$f : f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x \quad \text{ρητός} \\ 0, & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος} \end{cases}$ ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$, με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Γι' αυτήν ισχύει:

- $f(\alpha)\cdot f(\beta) \geq 0 \;\forall\; \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ (Δηλαδή η άρνηση της συνθήκης $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$)
- Η f ασυνεχής $\forall\, x_0 \in [\alpha,\beta]$ (Δηλαδή δεν είναι συνεχής ούτε σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της , αυτό απαιτεί τον ακολουθιακό ορισμό της σύγκλισης και εκφεύγει των πλαισίων της Γ' Λυκείου)

Ως αντίστοιχο «συμπέρασμα» έχουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει άπειρες ρίζες στο πεδίο ορισμού της και μάλιστα υπεραριθμήσιμες!

Μάλιστα, και το πεδίο ορισμού μπορεί να εκληφθεί απεριόριστα μικρό (δηλαδή $\beta - \alpha < \varepsilon$, $\forall\; \varepsilon > 0$) χωρίς να επηρεάζονται αυτά που ισχύουν για την συνανάρτηση αυτή.

Δίνεται η πρόταση: «Αν η συνάρτηση *f* , είναι συνεχής στο διάστημα (α, β) τότε η *f* έχει ένα ολικό μέγιστο και ένα ολικό ελάχιστο στο (α,β) Αν είναι αληθής να αποδειχθεί, αν είναι ψευδής να αποδειχθεί η αναλήθειά της με κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Απάντηση: Είναι ψευδής, αφού αυτή η πρόταση είναι αληθής μόνο για κλειστά διαστήματα της μορφής $[\alpha,\beta]$. Παράδειγμα, η $f: f(x) = \dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\Big/(\alpha,\beta)$.

Για την f ισχύουν:

- $f(x) < 0 \ \forall\ x \in (\alpha,\beta)$ και συνεχής στο αυτό.
- Στην θέση $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ έχω ολικό μέγιστο, δηλαδή $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq f(x) \ \forall\ x \in (\alpha,\beta)$
- $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to\beta} f(x) = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$

Δηλαδή η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, έχει μέγιστο, αλλά δεν έχει ελάχιστο. Συνεπώς η πρόταση είναι ψευδής, αφού βρήκαμε συνάρτηση πληρούσα τις υποθέσεις της προτάσεως, αλλά όχι το συμπέρασμά της.

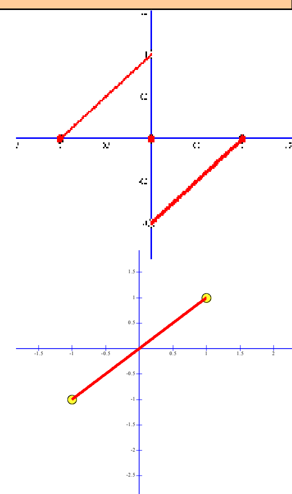
Ένα άλλο αντιπαράδειγμα είναι η $g: g(x) = \text{εφ}x\Big/\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ η οποία:

- Είναι συνεχής σε κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$
- Δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο, καθώς $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$. Δηλαδή δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένη.

Είναι γνωστή η ισχύς της προτάσεως: «Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό $[\alpha,\beta]$, τότε η f έχει ένα ολικό μέγιστο και ένα απόλυτο ελάχιστο στο $[\alpha,\beta]$.»
Να αποδείξετε τα εξής:

1) Η προϋπόθεση της συνέχειας στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ είναι απαραίτητη για την ισχύ του θεωρήματος
2) Η προϋπόθεση της συνέχειας στα άκρα του διαστήματος είναι επίσης απαραίτητη.
3) Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

Απάντηση : 1)Έστω $f: f(x) = \begin{cases} x+1, \text{αν} & x \in [-1,0) \\ 0 \ \text{αν} & x = 0 \\ x-1 \ \text{αν} & x \in (0,1] \end{cases}$.



Η f είναι ασυνεχής μόνο στο σημείο $x_0 = 0$, διότι $f(0) = 0 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ και ως έχουσα πολυωνυμικούς κλάδους είναι συνεχής στα διαστήματα που ορίζονται αυτοί.

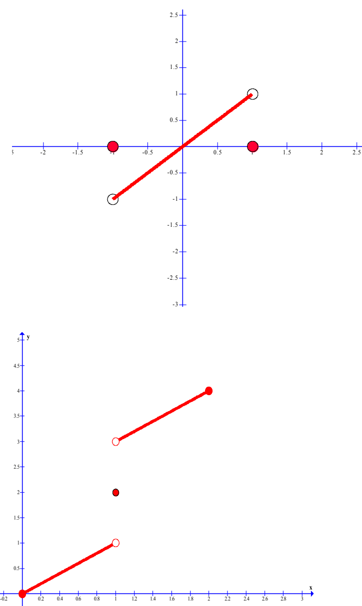
Η f δεν έχει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο, και γι' αυτό αρκούσε η ασυνέχεια σε ένα μόνο σημείο του πεδίου ορισμού της.

Πράγματι, το πεδίο τιμών της είναι το $(-1,1)$ το οποίο ως ανοικτό, δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο.

2)Έστω $g : g(x) = x/(-1,1)$. Η f συνεχής $\forall\, x \in (-1,1)$ αλλά το πεδίο τιμών της είναι επίσης το $(-1,1)$ όπου εκεί δεν έχω ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο.

Επίσης η $g/[-1,1)$ έχει ελάχιστο αλλά όχι μέγιστο όπως και η $g/(-1,1]$ έχει μέγιστο, αλλά όχι ελάχιστο.

Επίσης αν $h(x) = \begin{cases} g(x), & x \in (-1,1) \\ 0, & x = -1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο $[-1,1]$ και δεν έχει επίσης μέγιστο ή ελάχιστο.



3)Η συνάρτηση $\varphi : \varphi(x) = \begin{cases} \chi & \alpha\nu \;\; \chi \in [0,1) \\ 2 & \alpha\nu \;\; \chi = 1 \\ \chi + 2 & \alpha\nu \;\; \chi \in (1,2] \end{cases}$

Στο $f(2) = 4$ έχω ολικό μέγιστο

$f(0) = 0$ έχω ολικό ελάχιστο και στο 1 έχω ασυνέχεια.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Αν στο γράφημα μίας συνάρτησης υπάρχει εφαπτόμενη σε κάθε σημείο του, τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη παντού;

Απάντηση: Όχι πάντα. Ενδέχεται να υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία σε κάποιο σημείο του γραφήματος μιας συνάρτησης, αλλά στο σημείο εκείνο να μην υπάρχει η παράγωγος, διότι δεν είναι πραγματικός αριθμός και είναι +∞ ή -∞ η οριακή τιμή του λόγου μεταβολής της συνάρτησης σε αυτό το σημείο.

Αν $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt[3]{x}$, τότε

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$ και η ευθεία *x=0* (η κλίση +∞ που βρήκαμε εφάπτεται του διαγράμματος της $f(x) = \sqrt[3]{x}$ στο σημείο (0,0) εις το οποίο δεν θεωρείται παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη), αλλά ως έχουσα **«κατ' εκδοχήν» παράγωγο** το +∞.

Το γράφημα μια συνάρτησης είναι απολύτως «λείο», δεν έχει «ακίδες», οξείες, ορθές ή αμβλείες γωνίες, ευθύγραμμες ή καμπυλόγραμμες, ενώ σε κάθε σημείο του, υπάρχει εφαπτομένη ευθεία. Όμως η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη! Πως μπορεί αυτό να είναι δυνατόν;

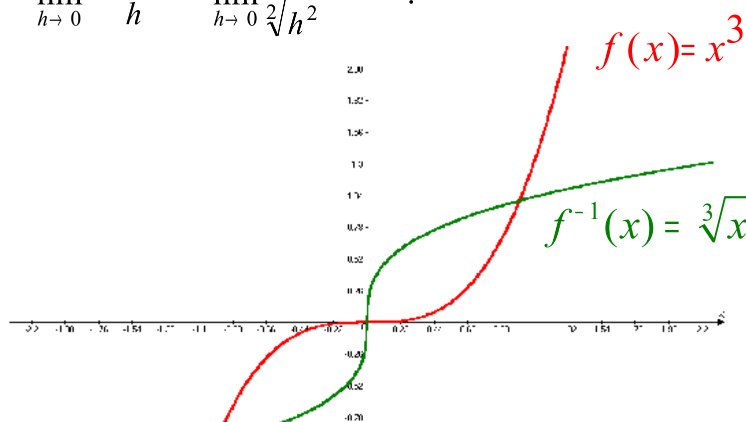
Απάντηση: Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$, είναι παντού παραγωγίσιμη.

Το γράφημα της επόμενης είναι παντού «λείο» και υπάρχει παντού εφαπτομένη ευθεία.
Το συμμετρικό του γραφήματος ως προς την ευθεία $y = x$, ως γνωστόν είναι αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ (θεωρούμε ότι το x παίρνει και αρνητικές τιμές, άλλως ορίζουμε $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \alpha\nu \quad x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \alpha\nu \quad x < 0 \end{cases}$.

Το γράφημα της f^{-1}, λόγω συμμετρίας, έχει τις ίδιες γεωμετρικές ιδιότητες με το γράφημα της f.

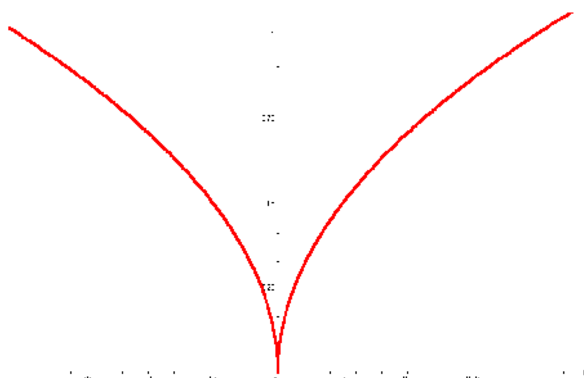
Όμως, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$.

Δηλαδή, η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. (Είναι μόνο «κατ' εκδοχήν» παραγωγίσιμη).



Ένας φοιτητής, επικαλούμενος το προηγούμενο παράδειγμα, έχει τη γνώμη, ότι η έννοια της παραγώγου είναι «ανεπαρκώς ορισμένη». Ισχυρίζεται ότι θα πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος, ώστε για κάθε συνάρτηση (όπως και για την $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$) να υπάρχει η έννοια της παραγώγου σε κάθε σημείο της, εάν και μόνο εάν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία σε αυτό το σημείο της. Ισχυρίζεται, ότι με αυτό τον τρόπο καλύπτουμε την παραγωγισιμότητα της $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ σε κάθε σημείο της, πράγμα που έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με την γεωμετρική εποπτεία και την αίσθηση του «λείου» γραφήματος
Υπάρχει αντιπαράδειγμα που να κλονίζει την πίστη και τους ισχυρισμούς του φοιτητή;

Απάντηση: Αντιπαράδειγμα μπορεί να είναι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$.



Στο σημείο 0 υπάρχει μοναδική εφαπτομένη του διαγράμματος της συνάρτησης ο άξονας yy' καθώς $f'_{\alpha}(0) = -\infty$, $f'(\delta) = +\infty$.
Εδώ και υπάρχει μοναδική ευθεία εφαπτομένη (με την εκ δεξιών και εξ αριστερών έννοια), αλλά δεν έχω κατ' ουδένα τρόπο «λεία συνάρτηση», αφού στο 0 έχω μια ένωση **δύο οιονεί**

«κερατοειδών γωνιών». Παράγωγο στο 0 δεν έχουμε, πράγμα που συμφωνεί με την εποπτεία και αντιβαίνει στην ιδέα της μοναδικής εφαπτομένης ευθείας. Αξίζει να σημειωθεί, ότι στο 0 δεν υπάρχει ούτε «κατ' εκδοχήν» παράγωγος, αφού οι εκ δεξιών και εξ αριστερών οριακές τιμές της παραγώγου είναι $+\infty$ και $-\infty$ αντιστοίχως.

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Το θεώρημα Rolle έχει ως εξής: «Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε $\exists$ ένα τουλάχιστον ξ του (α,β), ώστε $f'(\xi)=0$».

Να αποδείξετε με χρήση τουλάχιστον αντιπαραδειγμάτων τα παρακάτω:

(i) Η προϋπόθεση της συνέχειας είναι εντελώς απαραίτητη.

(ii) Η προϋπόθεση της συνέχειας σε κλειστό διάστημα είναι εντελώς απαραίτητη.

(iii) **Η συνέχεια πρέπει να είναι $[\alpha,\beta]$ και όχι σε διάστημα (α,β) ή $[\alpha,\beta)$.**

(iv) **Η παραγωγισιμότητα στο (α,β) είναι απαραίτητη.**

(v) **Η συνθήκη $f(\alpha)=f(\beta)$ είναι απαραίτητη.**

(vi) **Οι συνθήκες του Θ.Rolle είναι ικανές για να ισχύει το συμπέρασμα, αλλά όχι και αναγκαίες.** [3]

Απάντηση: (i) Έστω και σε ένα σημείο να είναι ασυνεχής η f, είναι δυνατόν να μην ισχύει το

συμπέρασμα του Θ. Rolle, α.χ.

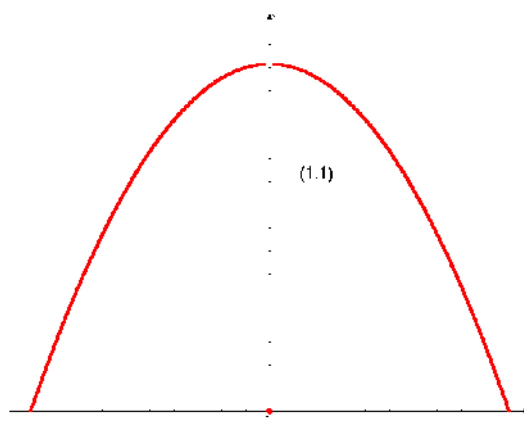
Αν

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & \text{αν } x\in[-1,1]-\{0\}\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

τότε η f

- Είναι ασυνεχής στο 0 και συνεχής στο $[-1,1]-\{0\}$.
- $f(-1)=f(1)=0$.
- Είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]-\{0\}$.

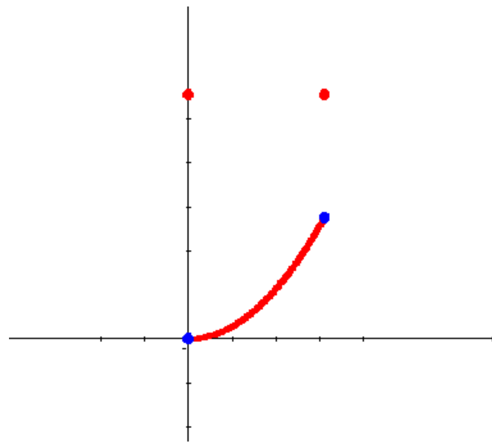
Δηλαδή, πληρούνται όλες οι συνθήκες του Θ. Rolle, πλην της ασυνεχείας σε ένα και μοναδικό σημείο.



Έτσι όμως, $\nexists\ x_0\in[-1,1]: f'(x_0)=0$, διότι αν υποθέσουμε ότι υπήρχε τέτοιο x_0, θα επαλήθευε την εξίσωση $f'(x_0)=0 \Rightarrow 2x_0=0 \Rightarrow x_0=0$, άτοπο, διότι στο $x_0=0$ είναι ασυνεχής, άρα στο 0 δεν είναι παραγωγίσιμη.

[3] Αναλόγως και για το Θ.Μ.Τ.

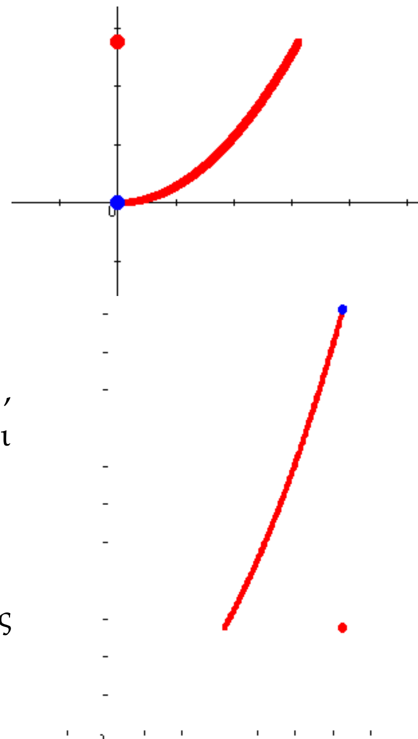
(ii) Η $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{αν} & x\in(0,1) \\ 2, \text{αν} & x\in\{0,1\} \end{cases}$



- Δεν είναι συνεχής στο κλειστό $[0,1]$.
- Είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό $(0,1)$.
- Ισχύει $f(0)=f(1)=2$.

Αλλά, $\nexists\ x_0\in(0,1): f'(x_0)=0$. Διότι αν υπήρχε τέτοιο x_0, θα έπρεπε να είναι $x_0=0$, όμως στο 0 δεν είναι συνεχής, άρα όχι και παραγωγίσιμη.

(iii) Αν $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(0,1] \\ 1, & x=0 \end{cases}$ τότε



- Η f ασυνεχής στο 0, άρα και μη παραγωγίσιμη.
- $f(0)=f(1)=1$.
- Η f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$.

Αλλά, $\nexists\ x_0\in(0,1)$ με $f'(x_0)=0$, διότι μόνο το 0 θα μπορούσε να έχει αυτή την ιδιότητα και στο 0 δεν παραγωγίζεται.

αν υπήρχε τέτοιο x_0, θα έπρεπε να είναι $x_0=0$, όμως στο 0 δεν είναι συνεχής, άρα όχι και παραγωγίσιμη.

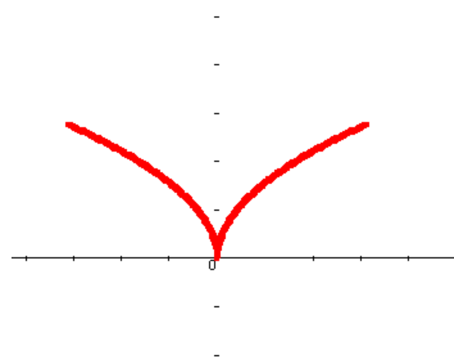
Αν $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[1,2) \\ 1, & x=2 \end{cases}$ τότε

- Η f ασυνεχής στο 2, και συνεχής παντού αλλού.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$.
- $f(1)=f(2)=1$.

Όμως, $\nexists\ x_0\in(0,1): f'(x_0)=0$, διότι αν υπήρχε κάποιο, θα ήταν το 0 και $0\notin(1,2)$.

(iv) Η παραγωγισιμότητα στο (α,β) είναι απαραίτητη.

Αν $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & x\in[0,1] \\ -\sqrt{|x|} & x=[-1,0) \end{cases}$ τότε



- Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$.
- $f(1)=f(-1)=1$.
- Η f δεν είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0.

Όμως, $\nexists\ x_0 \in (-1,1) : f'(x_0) = 0$, (διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο, καταλήγουμε σε άτοπο).

(v) Η συνθήκη $f(\alpha) = f(\beta)$ είναι απαραίτητη.



Αν $f(x) = x^2 \,/[1,2]$, τότε

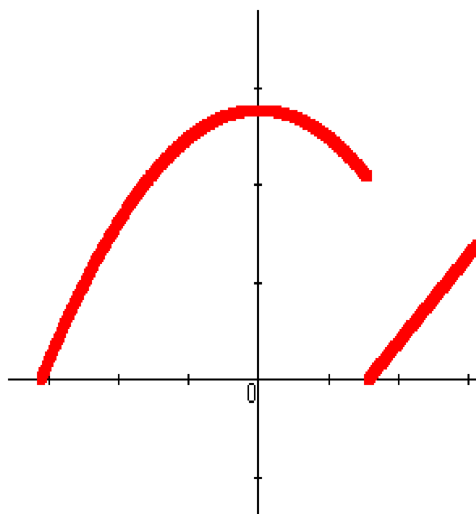
- Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$.
- $f(1) = 1 \neq 4 = f(2)$.

Όμως, $\nexists\ x_0 \in (1,2) : f'(x_0) = 0$, διότι θα έπρεπε $2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \notin (1,2)$.

(vi) Οι συνθήκες του Θ.Rolle είναι ικανές αλλά όχι αναγκαίες. Θα δώσουμε παράδειγμα όπου δεν ικανοποιείται **καμία** συνθήκη του Θ. Rolle, όμως $\exists\ x_0 \in (\alpha, \beta)\ :\ f'(x_0) = 0$.

Θεωρώ την

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right) \\ x - \frac{1}{2}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$



- Η f είναι ορισμένη στο $[-1,1]$.
- Η f δεν είναι συνεχής στο $[-1,1]$, αφού στο $x_0 = \frac{1}{2}$ έχω ασυνέχεια.
- Η f, ως μη συνεχής στο $x_0 = \frac{1}{2}$ δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$.

Όμως, $\exists\ x_0 = 0 \in (-1,1)\ :\ f'(0) = 0$.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Μπορούν δύο συναρτήσεις με ίδια αναλυτική έκφραση να έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας;

<u>Απάντηση</u>: Είναι δυνατόν, εάν ορίζονται σε διαφορετικά σύνολα.

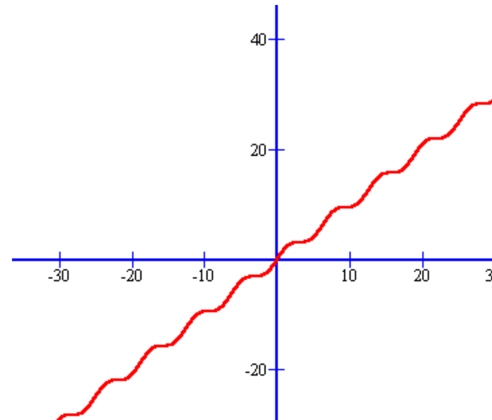
Π.χ. η $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα,

ενώ η $g:(0,-\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα.

«Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα σε αυτό, τότε $f'(x)>0\ \forall x\in\Delta$». Να αποδείξετε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

Απάντηση: π.χ. η $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως $f'(0)=0$.

Μάλιστα, είναι δυνατόν, μια συνάρτηση, να έχει άπειρα σημεία στα οποία να μηδενίζεται η πρώτη παράγωγός της και αυτή να είναι γνησίως αύξουσα. Παράδειγμα είναι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x+\eta\mu x$. Η f είναι γνησίως αύξουσα.



Όμως $f'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x$ και η εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=1\Leftrightarrow (x=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z})$.

Δηλαδή, έχω άπειρες αριθμήσιμες τιμές για τις οποίες $f'(x)=0$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα.

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>: Το αντίστροφο της ανωτέρω προτάσεως, είναι η γνωστή αληθής πρόταση.

Υπάρχει συνάρτηση της οποίας κάθε σημείο να είναι ολικό μέγιστο και ταυτοχρόνως ολικό ελάχιστο;

Απάντηση: Η σταθερή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=c$ πληροί την τεθείσα συνθήκη, αφού αν $x_0\in\mathbb{R}$, $f(x_0)=c\le c=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και $f(x_0)=c\ge c=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Υπάρχει συνάρτηση f:[4]

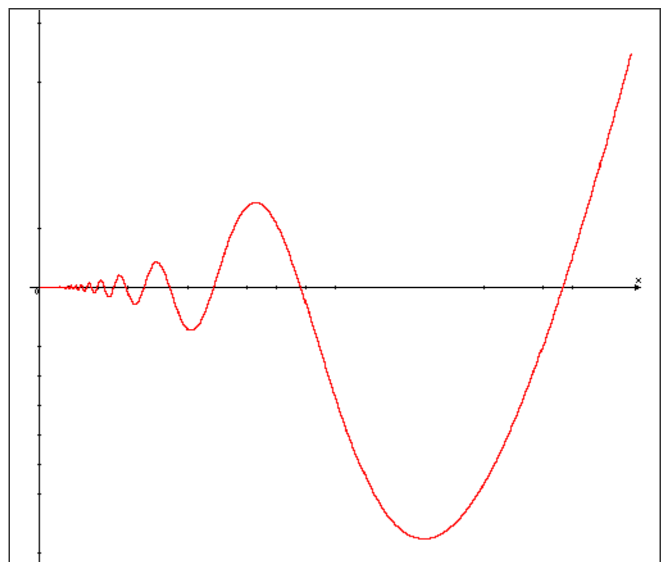
- **Ορισμένη στο $[\alpha,+\infty)$ και συνεχής**
- **Στο α δεν έχει τοπικό ακρότατο.**

Απάντηση: Θεωρούμε την $f:[0+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Για κάθε $x>0$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών και σύνθετη συνεχών.

Επίσης στο 0 είναι συνεχής, αφού $f(0)=\lim\limits_{x\to0}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$ ως γινόμενο απειροστής επί φραγμένη. Όμως το $f(0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο, αφού οσοδήποτε κοντά στο 0, σε



$f(x)=x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$

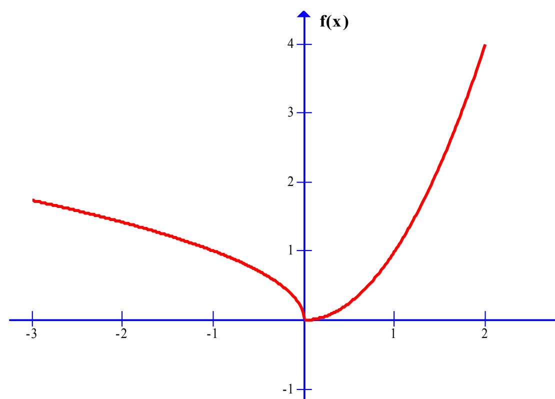
[4] Η μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης, είναι εκτός πνεύματος ύλης της Γ΄ Λυκείου, αλλά χρειάζεται στα επόμενα για άρση μιας συνήθους πλάνης για τα ακρότατα.

κάθε διάστημα της μορφής $[0,x]$ η $f(x)$ εναλλάσσει πρόσημο, δηλαδή γίνεται και θετική και αρνητική, συνεπώς η τιμή 0 δεν μπορεί να είναι τοπικό ακρότατο.
Ο παραπάνω ισχυρισμός καθίσταται φανερός, αν θεωρήσω την ακολουθία $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$ και $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό της σύγκλισης της ακολουθίας, έπεται, ότι σε κάθε διάστημα της μορφής $(0,\varepsilon)$, υπάρχουν άπειροι όροι της και οι τιμές της συνάρτησης γι αυτές τις άπειρες τιμές είναι $f(x_n) = x_n^2 \cdot 1 = x_n^2 > 0$.
Αν θεωρήσω $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}} \to 0$ και $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε και αυτή σε διάστημα $(0,\varepsilon)$, έχει άπειρους όρους της και οι τιμές της συνάρτησης γι αυτούς τους όρους είναι $f(y_n) = y_n^2(-1) = -y_n^2 < 0$.
Δηλαδή, οσοδήποτε κοντά στο 0, έχω και θετικές τιμές και αρνητικές τιμές, άρα το 0 δεν μπορεί να είναι ακρότατο

Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης, εκατέρωθεν σημείου x_0 της οποίας, να γίνεται αλλαγή κυρτότητας, αλλά στο x_0 να μην έχω σημείο καμπής .

Απάντηση: Θεωρώ την $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

Στο $x_0 = 0$ η κυρτότητα αλλάζει είδος, αφού $f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x\sqrt{-x}}, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ (δεν υπάρχει η $f''(0)$, αφού δεν υπάρχει και η $f'(0)$) και $f''(x) < 0 \ \forall x < 0$, ενώ $f''(x) > 0 \ \forall x > 0$.
Στο $x_0 = 0$ έχω $f'_\alpha(0) = -\infty$ και $f'_\delta(0) = 0$.
Έτσι, στο $x_0 = 0$ δεν υπάρχει εφαπτομένη και επομένως το $x_0 = 0$ δεν είναι σημείο καμπής.



Υπάρχει περίπτωση, εκατέρωθεν ενός σημείου x_0, μια συνάρτηση f να έχει αλλαγή κυρτότητας και x_0 να μην είναι σημείο καμπής διότι το $x_0 \notin \mathcal{D}(f)$.
Για παράδειγμα η $f(x) = \frac{1}{x} / \mathbb{R}^*$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ και $f''(x) > 0 \ \forall x > 0$, $f''(x) < 0 \ \forall x < 0$, ενώ δεν υπάρχει σημείο μηδενισμού της β′ παραγώγου.

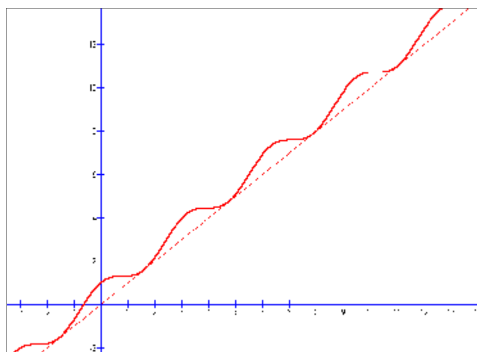
ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν να υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}$, αλλά η $f(x)$ να μην έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Απάντηση: Αν $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu^2 x/\mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}=$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2x}$

$=1+0+0=1$



Όμως $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 x$. Το τελευταίο όριο δεν υπάρχει, διότι αν θεωρήσω $x_n=2n\pi\to+\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 x_n=\lim_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 2n\pi=\lim_{n\to+\infty}1^2=1$, ενώ αν

$y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$, τότε

$\lim_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 y_n=\lim_{n\to+\infty}0=0$. Δηλ. στο $+\infty$ η συνάρτηση συνx^2, κυμαίνεται συνεχώς μεταξύ του 1 και του 0, χωρίς να πλησιάζει πουθενά.

Είναι δυνατόν ασύμπτωτη καμπύλης να τέμνει την καμπύλη;

Απάντηση: Πρόκειται για ενδιαφέρον παιδαγωγικό (και μαθηματικό) ερώτημα, καθώς η ετυμολογική σημασία της λέξης «ασύμπτωτη» παραπέμπει ευθέως στην «μη σύμπτωση» και (κατά τη συνήθη ερμηνεία) στο ότι «δεν έχουν κοινά σημεία».

Από την άλλη, η μαθηματική σημασία του όρου, δεν αποκλείει την ύπαρξη κοινών σημείων, αλλά και αυτό δεν είναι προφανές αν γίνει μια όχι σωστή γεωμετρική μετάφραση του ορισμού (πράγμα λίαν σύνηθες).

Ο ορισμός της πλάγιας ασύμπτωτης, απαιτεί ύπαρξη $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x+\mu\right]=0. \qquad (1)$$

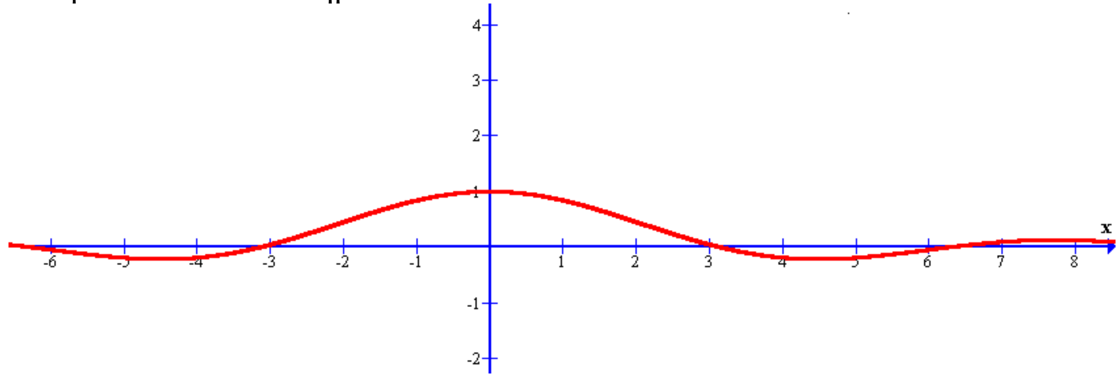
Η συνήθης λανθασμένη γεωμετρική θεώρηση του ορισμού έγκειται στην εξής μετάφραση: « Η (1) σημαίνει ότι η $f(x)$ και η ευθεία $y=\lambda x+\mu$ εφάπτονται στο άπειρο ή πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά χωρίς να συμπίπτουν ποτέ».

Η παραπάνω θεώρηση είναι σωστή για την συντριπτική πλειονότητα των **χρησιμοποιούμενων** παραδειγμάτων ή περιπτώσεων, **αλλά όχι και για όλα.**

Παραθέτουμε το ακόλουθο αντιπαράδειγμα:

$f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ η οποία είναι συνεχής.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$, πράγμα που σημαίνει ότι η ευθεία $y=0$ (δηλαδή ο άξονας xx') είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $f(x)$.
Όμως η $f(x)$ και ο άξονας xx' έχουν άπειρα (αριθμήσιμα) κοινά σημεία, αφού η εξίσωση $\frac{\eta\mu x}{x}=0 \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x=0 \Leftrightarrow (x=\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{R})$ και έτσι φαίνεται η απειρία των κοινών σημείων.



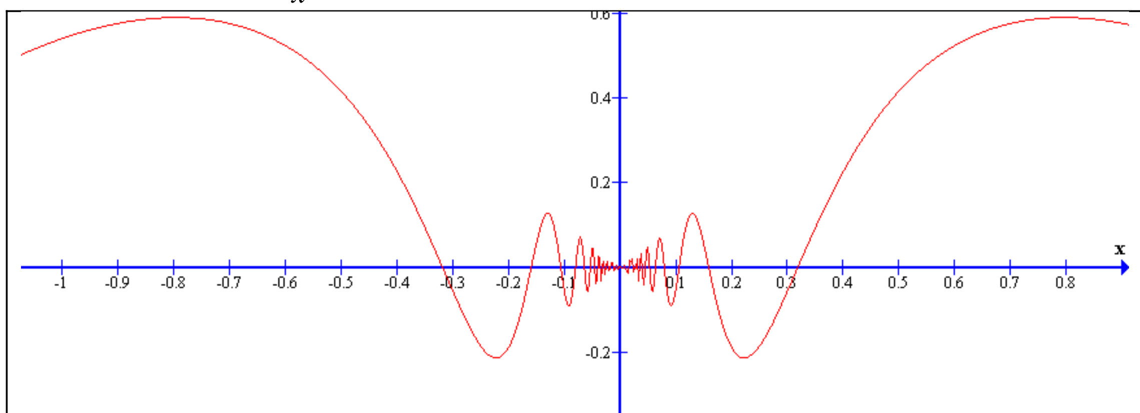
Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu(\chi)}{\chi}$ έχει την μορφή μιας αποσβενυόμενης φθίνουσας ταλάντωσης και προς το $+\infty$ και προς το $-\infty$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ L'HOSPITAL

Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν να μην υπάρχει το $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ και να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Απάντηση: Το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\varepsilon\varphi x}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\varepsilon\varphi x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{\varepsilon\varphi x}{x}}=\frac{0}{1}=0.$$



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2ημ(\frac{1}{χ})}{εϕ(χ)}$ **σε μια περιοχή του μηδενός , όπου και εποπτικά φαίνεται η ύπαρξη του ορίου.**

Όμως,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2ημ\frac{1}{x}\right)'}{(εφx)'}=\lim_{x\to 0}\cdot\frac{2xημ\frac{1}{x}-x^2\frac{1}{x^2}συν\frac{1}{x}}{\frac{1}{συν^2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{συν^2x}}-\lim_{x\to 0}\frac{συν\frac{1}{x}}{\frac{1}{συν^2x}}=0-\frac{\lim_{x\to 0}συν\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 0}συν\frac{1}{x}$$

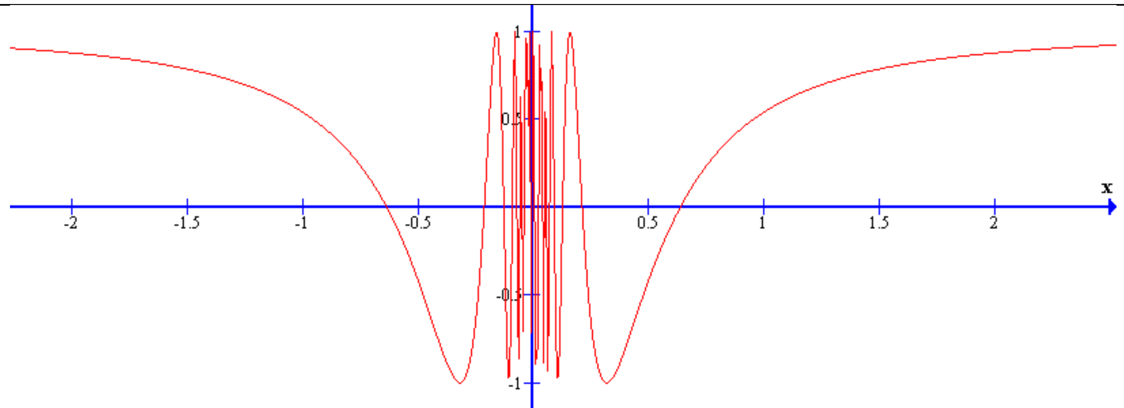
και το όριο αυτό δεν υπάρχει.

Πράγματι,

αν $x_n=\frac{1}{2\pi n}\to 0$ και $x_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$,τότε $\lim συν\frac{1}{x_n}=\lim συν2\pi n=1\to 1$.

Αν $x_n'=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\to 0$ και $x_n'\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$, τότε $\lim συν\frac{1}{x_n'}=\lim συν\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=$ $0\to 0$.

Επομένως δεν υπάρχει το όριο του $συν\frac{1}{x}$ όταν $x\to 0$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=συν(1/χ) **. Εποπτικά έχουμε μια γραμμή που ταλαντώνεται μεταξύ του 1- και 1 όσο πλησιάζουμε στο 0 , χωρίς όμως να σταθεροποιείται σε κάποια συγκεκριμένη τιμή.**

ΣΧΟΛΙΟ: Το παράδειγμα αναδεικνύει το ικανό και όχι το αναγκαίο του κανόνα L'Hopsital. Επομένως, όταν δεν υπάρχει η οριακή τιμή του λόγου των παραγώγων, δεν έπεται ότι δεν υπάρχει και το αρχικό προς υπολογισμό όριο.

Με κατάλληλο αντιπαράδειγμα να αποδειχθεί το ψεύδος της παρακάτω προτάσεως:

«Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$ **τότε και** $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$**».**

<u>Απάντηση:</u> Θεωρώ $f(x) = x$, $g(x) = x+1$.

Τότε, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+1} = \frac{0}{1} = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1} = 1 \neq 0$.

Επομένως η πρόταση είναι ψευδής. Όπως δείξαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, αληθής γενικά είναι η αντίστροφη πρόταση.

Αόριστη Ολοκλήρωση.

Το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{1}{x}dx$, δεν μπορεί να υπολογισθεί με παραγοντική ολοκλήρωση, διότι οδηγεί στην αντίφαση 1=0, όπως φαίνεται παρακάτω:

$I = \int \frac{1}{x}dx = \int x' \cdot \frac{1}{x}dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x d\frac{1}{x} = 1 - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = 1 = 1 + \int \frac{1}{x}dx = 1 + I.$

Άρα, $I = 1 + I \to 1 = 0(!)$

Υπάρχει κάποιο λάθος στα παραπάνω;

<u>Απάντηση:</u> Το λάθος στο παραπάνω είναι η παράληψη της σταθεράς ολοκλήρωσης. Στις περισσότερες περιπτώσεις, αυτή η παράληψη δεν δημιουργεί πρόβλημα, αλλά σπανίως (όπως εδώ) μπορεί να δημιουργήσει αντίφαση.

Η τελική ισότητα θα ήταν $I = 1 + C + I$ που δεν συνιστά αντίφαση.

Να σημειωθεί., ότι δεν είναι το μόνο λάθος που μπορεί να προκύψει όταν δεν είμαστε προσεκτικοί στην παράθεση της σταθεράς ολοκλήρωσης.

Στο παρακάτω παράδειγμα θα «αποδείξουμε», ότι η γνωστή θεμελιώδης τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ δεν ... ισχύει!.

Έχουμε: $\int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx = \frac{1}{2}\eta\mu^2 x$ (1)

Αλλά και $\int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x$ (2).

Με απλή παραγώγιση των δευτέρων μελών των (1) και (2) μπορούμε να κάνουμε επαλήθευση.

Έτσι από (1) και (2) έχω $\frac{1}{2}\eta\mu^2 x = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x$ ή

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$ (!!!)

Το σωστό είναι οι (1) και (2) να γράφονται

$\int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}\eta\mu^2 x + C$

$\int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x + C'$

Με άλλα λόγια, το σύμβολο $\int f(x)dx$, όταν υπάρχει, δεν συμβολίζει μία συνάρτηση, αλλά ένα σύνολο συναρτήσεων που διαφέρουν κατά σταθερά C. Συνεπώς όταν είναι γνωστή μία <u>συγκεκριμένη</u> $F_{(x)}$ αρχική της $f(x)$ γράφουμε: $\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Όταν υπολογίζουμε ορισμένα ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων, χρησιμοποιούμε τον τύπο των Newton-Leibniz: $\int_\alpha^x f(t)dt = F(x) - F(\alpha)$, όπου η f συνεχής και $F: F'(x) = f(x)$ σε διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Επιπλέον, πρέπει η F, να είναι συνεχής, παντού στο $[\alpha, \beta]$.
Η συνθήκη η τελευταία είναι απολύτως αναγκαία. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με παραδείγματα;

Απάντηση: α) Ισχύει $\left(\frac{1}{2}\text{τοξεφ}\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \neq 1$.

Τότε $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\frac{2x}{1-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$ *βγαίνει δηλαδή το παράδοξο αποτέλεσμα αρνητικού ορισμένου ολοκληρώματος, μιας συνάρτησης παντού θετικής στο διάστημα ολοκλήρωσης.* Το λάθος βεβαίως είναι ότι η συνάρτηση $F(x) = \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\frac{2x}{1-x^2}$ δεν ορίζεται για $x = 1 \in [0, \sqrt{3}]$. Η σωστή λύση είναι η εξής:

$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \text{τοξεφ}x \frac{2x}{1-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}}\ \text{τοξεφ}\sqrt{3} - \text{τοξεφ}0 = \frac{\pi}{3}$.

β) Ένα απλούστερο παράδειγμα: Έστω $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ και $F:[0,1] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \begin{Bmatrix} 1, & x = 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ 0, & x = 1 \end{Bmatrix}$, τότε, προφανώς $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (0,1)$,

$F(1) - F(0) = \ -1 \neq \int_0^1 f(x)dx = 1$. Αυτό βέβαια οφείλεται στο ότι η F δεν είναι συνεχής για $x = 0$ και για $x = 1$.

γ) Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το $\int_0^{4\pi} \frac{dx}{4+\text{συν}x}$. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι παντού θετική, αφού $4 + \text{συν}x \geq 3\ \forall x \in \mathbb{R}$. Αν αντικαταστήσω το x, θέτοντας

$$\text{εφ}\frac{x}{2} = \omega \qquad (1)$$

τότε

$$\text{συν}x = \frac{1-\text{εφ}^2\frac{x}{2}}{1+\text{εφ}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2} \qquad (2)$$

Διαφορίζοντας την (1) έχω:

$d\left(\text{εφ}\frac{x}{2}\right) = d\omega \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx = d\omega \Rightarrow$$ (από τον τύπο του αποτετραγωνισμού του συνημιτόνου)

$$\frac{2}{1+\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{1}{2}dx = d\omega \Rightarrow \qquad ((2))$$

$$\frac{dx}{1+\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}} = d\omega \Rightarrow$$

$$dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}.$$

Έτσι, το αρχικό ορισμένο ολοκλήρωμα, γίνεται:

για $x = 0$, λόγω (1) έχω $\varepsilon\varphi\frac{0}{2} = 0$,

για $x = 4\pi$, λόγω (1) έχω $\omega = \varepsilon\varphi\frac{4\pi}{2} = 0$.

Άρα, $\int_0^{4\pi}\frac{dx}{4+\sigma\upsilon\nu x} = \int_0^0 \frac{1}{4+\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}}\cdot\frac{2}{1+\omega^2}d\omega = 0$ (!).

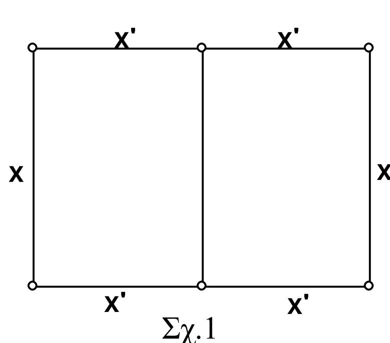
Δηλαδή, το ορισμένο ολοκλήρωμα παντού θετικής συνάρτησης, είναι μηδέν! Φυσικά το λάθος προεκλίθη, στην αντικατάσταση, αφού η συνάρτηση $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $[0,4\pi]$.

ΕΦΑΡΜΟΖΟΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΕ ΕΝΑ ΦΥΛΛΟ ΧΑΡΤΙ A_4

Γιάννης Π. Πλατάρος *, Καπετάν Κρόμπα 37, Τ.Κ. 242 00 ΜΕΣΣΗΝΗ*
Ηλ. δ/ση: Plataros@sch.gr

Περίληψη: *Στο πιο κοινό μέγεθος χαρτιού στον κόσμο , κρύβονται απροσδόκητα αρχαία μαθηματικά , τα οποία ανακαλύπτονται με «Γεωμετρία δια διπλώσεως» και τα οποία βασίζονται στο ότι το χαρτί A_4 διπλωνόμενο κατά μήκος παραμένει όμοιο προς εαυτόν όπως και στην «ανθυφαίρεση» του* $\sqrt{2}$ *με την μονάδα.*

Εισαγωγή: Η απαίτηση που έχομε από τα διάφορα μεγέθη χαρτιών φωτοτυπίας , είναι να είναι όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα , έτσι ώστε κατά την σμίκρυνση ή μεγέθυνση, να υπάρχει πλήρης χρησιμοποίηση και του μήκους και του πλάτους . Η σμίκρυνση ή η μεγέθυνση είναι ομοιοθεσίες και θα πρέπει το ομοιόθετο ενός σήματος να χωρά ακριβώς στο μεγαλύτερο ή μικρότερο χαρτί. Επιπρόσθετα, για λόγους οικονομίας στην κοπή των χαρτιών, απαιτούμε ένα χαρτί διπλωνόμενο κατά μήκος, να παραμένει όμοιο προς εαυτόν . Αυτή η απαίτηση, μας οδηγεί στο παρακάτω σχήμα και στην αναλογία:



Σχ.1

$$\frac{2\chi'}{\chi}=\frac{\chi}{\chi'}\Leftrightarrow\frac{\chi^2}{\chi'^2}=2 \quad (1) \;\Leftrightarrow \frac{\chi}{\chi'}=\sqrt{2}$$

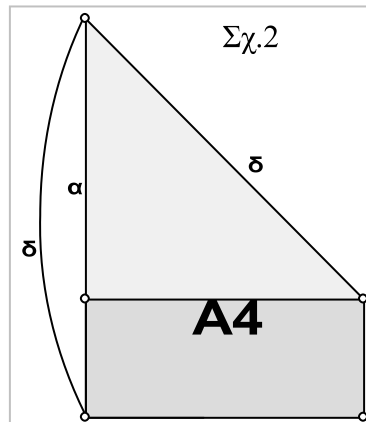
Σε κάθε νέα δίπλωση κατά μήκος (ή αντιστρόφως διπλασιασμό) το νέο σχήμα διατηρείται όμοιο προς εαυτόν όπως φαίνεται στην ισότητα των λόγων:

$$\ldots=\frac{8\chi'}{4\chi}=\frac{4\chi'}{2\chi}=\frac{2\chi'}{\chi}=\frac{\chi'}{\chi/2}=\frac{\chi'/2}{\chi/4}=\ldots$$

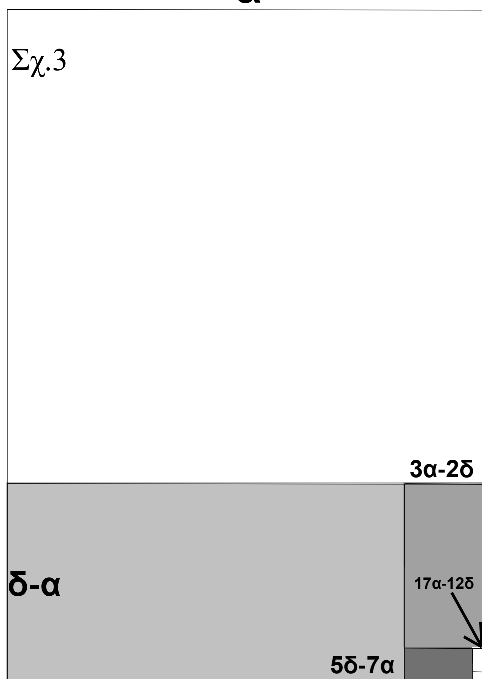
Έτσι, το διπλάσιο του φύλλου A_4 είναι το A_3 , το διπλάσιο του A_2 το μέγεθος A_1 . Αντιστρόφως, το ήμισυ του A_4 είναι το A_5 κ.ο.κ.

Στην μεγέθυνση μιας φωτοτυπίας A_4 σε A_3 εφαρμόζουμε μεγέθυνση $\sqrt{2}$ (□ 141%) και αντιστρόφως σε σμίκρυνση A_3 σε A_4 εφαρμόζουμε σμίκρυνση $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=$ (□ 70,7%)

Κατασκευή του A_4 : Η σχέση (1) δείχνει λόγο πλευρών των οποίων τα τετράγωνα έχουν λόγο 2 . Αυτό παραπέμπει στον λόγο κάθετης και υποτείνουσας πλευράς σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ή ισοδυνάμως στην σχέση διαγωνίου προς την πλευρά τετραγώνου. Επομένως , αν κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο και λάβουμε την διαγώνιό του ως την άλλη πλευρά σε παραλληλόγραμμο, έχομε κατασκευάσει ένα όμοιο με το A_4 . Αν μάλιστα πάρουμε την μικρή πλευρά 210mm τότε η διαγώνιος θα είναι $\sqrt{2}\cdot 210mm \approx 297mm$. Ως επαλήθευση μπορεί κανείς να διπλώσει ένα χαρτί A_4 κατά την έννοια του διπλανού σχήματος σχηματίζοντας διπλωμένο τετράγωνο και να διαπιστώσει , με νέα δίπλωση, ότι η υποτείνουσα δ συμπίπτει με την μεγαλύτερη πλευρά του A_4.



Η Ανθυφαίρεση του A_4 : «*Ανθυφαίρεσις*» ή «*Ανταναίρεσις*» ή «*αμοιβαία αφαίρεσις*» , είναι ένας αρχαίος αλγόριθμος εύρεσης κοινού μέτρου (εφ΄ όσον υπάρχει) μεταξύ δύο (ομοειδών) μεγεθών . Στους ακεραίους αριθμούς, ο αλγόριθμος αυτός ταυτίζεται με την γνωστή μέθοδο του Ευκλείδους εξαγωγής Μ.Κ.Δ. , μεταξύ δύο αριθμών. Οι ακέραιοι έχουν πάντα κοινό μέτρο την μονάδα, ο σχετικός αλγόριθμος περατούται πάντα και άρα η σχέση μεταξύ δύο ακεραίων είναι ρητή. Αν όμως τα βήματα του αλγορίθμου συνεχίζονται επ΄ άπειρον, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει κοινό μέτρο μεταξύ των μεγεθών και ότι η σχέση τους είναι άρρητη *(«Στοιχεία» Ευκλείδους, Βιβλίο X , πρόταση 2)*



<u>Περιγράφουμε τα βήματα του αλγορίθμου στο διπλανό σχήμα:</u>

(i.) το α , χωρά στο δ , 1 φορά και περισσεύει δ-α <α

(ii.) Το δ-α , χωρά στο α , 2 φορές και περισσεύει 3α-2δ<δ-α.
(iii.)Το 3α-2δ , χωρά στο δ-α , 2 φορές και περισσεύει 5δ-7α<3α-2δ
(iv.)Το 5δ-7α , χωρά στο 3α –2δ , 2 φορές και περισσεύει 17α –12δ<5δ-7α
(v.)Το 17α –12δ , χωρά στο 5δ-7α , 2 φορές και περισσεύει 29δ-41α< 17α – 12δ

Η Διαδικασία αυτή εκ πρώτης όψεως δεν ξέρουμε αν περατούται ή συνεχίζεται επ΄ άπειρον. Με διπλώσεις είναι πρακτικώς αδύνατον να ξεπεράσουμε το τέταρτο βήμα του αλγορίθμου , ενώ με αλγεβρικούς υπολογισμούς χρειάζεται να κάνουμε συνεχώς δοκιμές πράγμα που συνεχώς δυσκολεύει. Συνεπώς , για να αποφανθούμε για το άπειρο ή πεπερασμένο του αλγορίθμου, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο , το οποίο υπάρχει και πληρούται για την συγκεκριμένη περίπτωση. Λέγεται **«κριτήριο λόγου»** και θα δούμε πώς εφαρμόζεται. Παρατηρούμε, ότι $\frac{\delta-\alpha}{\alpha}=\frac{3\alpha-2\delta}{\delta-\alpha}(\Leftrightarrow 2\alpha^2=\delta^2 \; \pi o \upsilon \; \iota \sigma \chi \acute{\upsilon} \varepsilon \iota)$. **Αυτό σημαίνει, ότι η ανθυφαιρετική σχέση από το βήμα (ii) έως το βήμα (iii) θα επαναλαμβάνεται η ίδια ,** δηλ. το τμήμα της με το ψηφίο 2. ***(«κριτήριο λόγου»***) Με τις ιδιότητες των αναλογιών μπορούμε να το δούμε και ως εξής:

$$\frac{\delta-\alpha}{\alpha}=\frac{3\alpha-2\delta}{\delta-\alpha}=\frac{(\delta-\alpha)-2(3\alpha-2\delta)}{\alpha-2(\delta-\alpha)}=\frac{5\delta-7\alpha}{3\alpha-2\delta}=....=...=...$$

Αυτή η διαδικασία δίνει τα διαδοχικά υπόλοιπα του αλγορίθμου επ΄ άπειρον.
Έτσι, η ανθυφαιρετική σχέση πλευράς προς διαγώνιο δίνεται απ΄την σχέση: Ανθφ(δ,α) =[1,2,2,2,2,2,2,….] η οποία είναι περιοδική με περίοδο το 2 και ουσιαστικά δίνει μια απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$.
Σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα , η αρχαία αλγοριθμική διαδικασία παριστάνεται από το συνεχές κλάσμα:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}}}=\kappa$$

Το κ υπάρχει και είναι το $\sqrt{2}$ (δηλ. ο άρρητος λόγος $\frac{\delta}{\alpha}$) και μπορεί να το διαπιστώσει κάποιος με αλγεβρικό χειρισμό (γνωρίζοντας όμως απαραιτήτως ότι το συνεχές κλάσμα συγκλίνει σε πραγματικό) ως εξής:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}=\kappa-1\Leftrightarrow 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}=\frac{1}{\kappa-1}\Leftrightarrow$$

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}=\frac{1}{\kappa-1}-2\Leftrightarrow \kappa-1=\frac{1}{\kappa-1}-2\Leftrightarrow \kappa=\pm\sqrt{2} \; \mu\varepsilon \; \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \; \tau\eta\nu \; \sqrt{2}$$

Πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί: Οι Αριθμοί που εμφανίζονται ως συντελεστές στα δ και α λέγονται «πλευρικοί» και «διαμετρικοί» αριθμοί αντιστοίχως , έχουν μελετηθεί από τους Πυθαγορείους και αναφορές σε αυτούς έχομε από τον Θέωνα τον Σμυρνέα (42-45)από τον Ιάμβλιχο στα Σχόλια εις Νικόμαχον τον Γερασινό. (91-93) , από τον Πλάτωνα στην Πολιτεία (546b) και από τον Πρόκλο στα σχόλιά του στην Πολιτεία του Πλάτωνος. Οι αριθμοί αυτοί έχουν τις εξής ιδιότητες:

Α) Είναι μέλη δύο ακολουθιών που ορίζονται με διπλό αναδρομικό τύπο, ως εξής:

$\alpha_0 = 1$, $\delta_0 = 1$, $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \delta_\nu$ (1) *και* $\delta_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + \delta_\nu$ (2) . Οι πρώτοι 9 όροι των ακολουθιών είναι:

$\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$:	1	2	5	12	29	70	169	408	985	……
$\{\delta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$:	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	…….

Β) Οι ακολουθίες συνδέονται με την λίαν ενδιαφέρουσα σχέση $2\alpha_\nu^2 - \delta_\nu^2 = (-1)^\nu \forall \nu \in \mathbb{N}$ (3) Πράγματι, αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη των (1) και (2) διπλασιάσουμε την πρώτη σχέση και αφαιρέσουμε κατά μέλη θα καταλήξουμε στην σχέση $2\alpha_{\nu+1}^2 - \delta_{\nu+1}^2 = -(2\alpha_\nu^2 - \delta_\nu^2) = -(-1)^\nu = (-1)^{\nu+1}$. Μάλιστα ο Πρόκλος (2.27.1-2.29.4) , αποδεικνύει την (3) κάνοντας χρήση της προτάσεως ΙΙ.10 των Στοιχείων του Ευκλείδους («***γλαφυρόν θεώρημα***») Το εξαιρετικά ενδιαφέρον είναι, ότι σύμφωνα με τους Van der Waerden Στυλιανό Νεγρεπόντη κ.ά. πρέπει να θεωρηθεί βέβαιον, ότι ο Ευκλείδης εγνώριζε την μέθοδο απόδειξης της τελείας επαγωγής. Ο Van der Waerden μάλιστα ισχυρίζεται, ότι ήταν γνωστή στους Πυθαγορείους καθώς και τον Ζήνωνα τον Ελεάτη (5^{ος} αιώνας π.Χ.) . Τα επιχειρήματα είναι αρκετά και το κύριο των οποίων εστιάζεται στο ότι η πρόταση ΙΙ.10 αφ΄ ενός έχει μια εξαιρετικά εξεζητημένη ειδική διατύπωση και αφ΄ ετέρου δεν εφαρμόζεται πουθενά αλλού στα «Στοιχεία». Όμως, η ΙΙ.10 , συνιστά την απόδειξη της (3) στο βήμα «αποδεικνύω για ν= κ+1» της επαγωγικής μεθόδου.

Επίσης η (3) ισοδυναμεί με την σχέση $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu} = \sqrt{2 - \frac{(-1)^\nu}{\alpha_\nu^2}}$ (4) η οποία ορίζει μια νέα ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει στο $\sqrt{2}$. Μάλιστα όπως φαίνεται στο β΄μέλος της (4) , έχομε όρους που είναι διαδοχικές προσεγγίσεις εναλλάξ κατ΄ έλλειψιν και καθ΄ υπεροχήν του $\sqrt{2}$ και

μάλιστα με σημαντική ταχύτητα. Παραστατικότερα αυτό φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

δ_ν / α_ν	1	1,5	1,4	1,416	1,413	1,4142	1,41420	1,414215	1,4142131
$\sqrt{2}$ =1.4142135623730950488016887242096980785696718753769481…									

Επίσης ισχύει: $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}=\dfrac{5}{7}$, $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}}=\dfrac{12}{17}$ *κ.ο.κ.*

Σήμερα η (3) είναι μια μορφή της «*εξίσωσης του Pell*» που έχει θεμελιακή θέση στην θεωρία αριθμών. Ακόμα η $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ λέγεται «*ακολουθία Pell*» καθώς και η $\{\delta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ που είναι μια γενικότερη περίπτωσή της. Οι «*αριθμοί Pell*» συνδέονται με τους «*αριθμούς Lucas*» και με τους «*αριθμούς Fibonacci* » για κάθε περίπτωση των οποίων έχομε έναν απίστευτο όγκο παγκόσμιας βιβλιογραφίας . Σήμερα γνωρίζουμε ότι και για τις δύο ακολουθίες $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $\{\delta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ισχύει ο ίδιος αναδρομικός τύπος : $\alpha_{\nu+2}=2\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$, απ΄ όπου με την βοήθεια της χαρακτηριστικής εξίσωσης, μπορούμε να υπολογίσουμε και τους γενικούς όρους , για την περίπτωσή μας:

$$\alpha_\nu=\frac{(1+\sqrt{2})^\nu-(1-\sqrt{2})^\nu}{2\sqrt{2}},\forall\,\nu\in\mathbb{N} \text{ και } \delta_\nu=\frac{(1+\sqrt{2})^\nu+(1-\sqrt{2})^\nu}{2},\forall\,\nu\in\mathbb{N}$$

Δύο σχέσεις που συνδέουν τις ακολουθίες και που συνδέεται και με την ανθυφαίρεση, είναι η $\delta_\nu-\sqrt{2}\alpha_\nu=(-1)^\nu(\sqrt{2}-1)^\nu$,$\forall\,\nu\in\mathbb{N}$ και $\delta_\nu+\sqrt{2}\alpha_\nu=(\sqrt{2}+1)^\nu$,$\forall\,\nu\in\mathbb{N}$ οι οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη δίνουν την θεμελιώδη σχέση (3)

Μια γενική ανθυφαιρετική σχέση που συνδέει πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, είναι η ανθφ($\alpha_\nu-\delta_\nu\sqrt{2},1)=[2\delta_\nu,2\delta_\nu,2\delta_\nu,2\delta_\nu,2\delta_\nu,....]$

Σειρές: Απ ΄το σχήμα 3 , φαίνεται, ότι αν προσθέσω το εμβαδόν του πρώτου τετραγώνου και τα εμβαδά των απείρων ορθογωνίων που δημιουργούνται με την ανθυφαίρεση, θα πάρω το εμβαδόν του A_4. Δηλ.:

$$\alpha^2+2(\delta-\alpha)^2+2(3\alpha-2\delta)^2+2(5\delta-7\alpha)^2+2(17\alpha-12\delta)^2+2(29\delta-41\alpha)^2+....=\alpha\delta$$

ή $\alpha^2+2\sum_{\kappa=0}^{\infty}[(-1)^\kappa\alpha_\kappa\delta+(-1)^{\kappa+1}\delta_\kappa\alpha]^2=\alpha\delta$. (5)

Επίσης, αν προσθέσουμε όλα τα μήκη των απείρων ορθογωνίων κατά την οριζόντια διεύθυνση έχομε το άπειρο άθροισμα ίσο με α Δηλ.

$2(\delta-\alpha)+2(5\delta-7\alpha)+2(29\delta-41\alpha)+....=\alpha$ ή $2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\alpha_{2\kappa}\delta-\delta_{2\kappa}\alpha)=\alpha$ (6)

Επίσης το άθροισμα όλων των μηκών των απείρων ορθογωνίων κατά την κατακόρυφη έννοια, είναι δ-α , δηλαδή:

$2(3\alpha-2\delta)+2(17\alpha-12\delta)+2(99\alpha-70\delta)+...=\delta-\alpha$ ή

$2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\delta_{2\kappa+1}\alpha-\alpha_{2\kappa+1}\delta)=\delta-\alpha$ (7) Οι ισότητες (6) και (7) , με πρόσθεση κατά μέλη , δίνουν το άθροισμα όλων των μηκών των απείρων ορθογωνίων:

$$2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\delta_{2\kappa+1}\alpha-\alpha_{2\kappa+1}\delta)+2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\alpha_{2\kappa}\delta-\delta_{2\kappa}\alpha)=\delta-\alpha+\alpha\Leftrightarrow$$

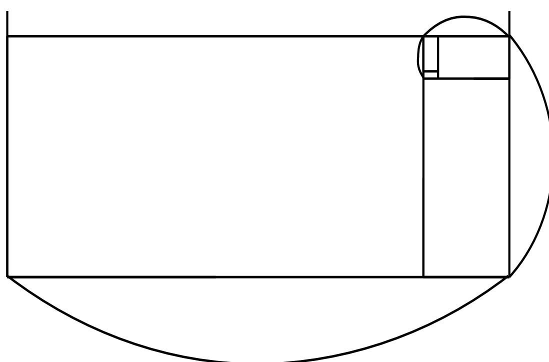
$$2[\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\delta_{2\kappa+1}\alpha-\alpha_{2\kappa+1}\delta)+\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\alpha_{2\kappa}\delta-\delta_{2\kappa}\alpha)]=\delta\Leftrightarrow$$

$$2\sum_{\kappa=0}^{\infty}[(-1)^{\kappa}\alpha_{\kappa}\delta+(-1)^{\kappa+1}\delta_{\kappa}\alpha]=\delta$$

Σε όλα τα ανωτέρω, μπορεί ο αναγνώστης να θεωρεί α=1 και δ=$\sqrt{2}$.

Επειδή η σύγκλιση των σειρών παρουσιάζεται εποπτικά, μπορεί να δικαιολογηθεί και θεωρητικά με αρχαίο κριτήριο σύγκλισης των «Στοιχείων» του Ευκλείδους την περίφημη «μέθοδο εξαντλήσεως» *(X.1)* σύμφωνα με την οποία, αν από ένα μέγεθος αποκοπεί τμήμα μεγαλύτερο του ημίσεως και από το εναπομένον αποκοπεί τμήμα πάλι μεγαλύτερο του ημίσεως και αυτό γίνεται συνεχώς, τότε μετά από πεπερασμένα βήματα, το εναπομένον, μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό. Το κριτήριο πληρούται τόσο για τα «αποκοπτόμενα ορθογώνια» από το A_4 , όσο και για τα «αποκοπτόμενα μήκη» των ορθογωνίων.

Καμπύλες: Αν τα προκύπτοντα ορθογώνια κατά την ανθυφαίρεση τα διατάξουμε με κυκλική φορά, κάνοντας τις διαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά και από κάτω προς τα πάνω, τότε οι κορυφές των ορθογωνίων ευρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **εσώστρεφος ηλιοτροπική,** επειδή οι σπόροι του ηλιοτροπίου είναι



τοποθετημένοι στο άνθος του σύμφωνα με μια τέτοια καμπύλη , η οποία έχει άμεση σχέση και με τους αριθμούς Fibonacci.

Συμπεράσματα: Για άλλη μια φορά φαίνεται, ότι τα μαθηματικά είναι «εφαρμοζόμενα» σε κάθε πτυχή του επιστητού αλλά και της καθημερινότητας , είναι μπροστά στα μάτια μας και μοιάζουν με «λαχείο ξυστό» Το μόνο που χρειάζεται είναι να ξύσουμε για να αποκαλυφθούν. Το αν θα είναι και εφαρμοσμένα εξαρτάται από την «τύχη» μας και βεβαίως από τις ανθρώπινες ανάγκες μας

Βιβλιογραφική αναφορά:

1) Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος «Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά» στο Παν. Αθηνών ,χειμερινό εξάμηνο 2001-02 διδάσκων Στυλιανός Νεγρεπόντης .
2) Ευάγγελου Σ. Σταμάτη «Ευκλείδους Στοιχεία» τ. I, II , III. Ο.ΕΔ.Β
3) Ευκλείδη Στοιχεία τ. 2 , έκδοση Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. Αθήνα 2001
4)Εξαρχάκου Θεοδώρου «Η αρχαία Ελλάδα κοιτίδα της μαθηματικής σκέψης» Πρακτικά 17^{ου} Συνεδρίου ΕΜΕ Αθήνα 2000.
5) http://mathworld.wolfram.com/PellNumber.html
6) http://users.tellurian.net/hsejar/maths/pell/
7) http://numbers.computation.free.fr/Constants/Sqrt2/sqrt2.html

Abstract: In the most common size of paper in the world, there are included hidden ancient mathematics, which can be discovered with the «Geometry though folding». These are based in the fact that the paper   folded in length remains similar to itself, as well as in the «anthyphaeresis» of $\sqrt{2}$ with the unit

Γιάννης Π. Πλατάρος

« Ανάλυση των χωρίων (Αναλυτικά Ύστερα 76a31-77a4 και Τοπικά 158b24-159a2) σχετικά με την αξιωματική μέθοδο. Ανάπτυξη των επιπτώσεων που έχει αυτή η ανάλυση στην Ιστορία των μαθηματικών , σχετικά με την θεωρία λόγων αριθμών και μεγεθών.»

Αριστοτέλης «Αναλυτικά ύστερα» 76^{a}31-77^{a}4

Λέγω δ' ἀρχὰς ἐν ἑκάστῳ γένει ταύτας ἃς ὅτι ἔστι μὴ ἐνδέχεται δεῖξαι. t..mèn οὖν σημαίνει καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ ἐκ τούτων, λαμβάνεται, ὅτι δ' ἔστι, τàj mèn ἀρχὰς ἀνάγκη λαμβάνειν, τὰ δ' ἄλλα δεικνύναι· οἷον τί μονὰς ἢ τί τὸ εὐθὺ καὶ τρίγωνον, εἶναι δὲ τὴν μονάδα λαβεῖν καὶ μέγεθος, τὰ δ' ἕτερα δεικνύναι.

Ἔστι δ' ὧν χρῶνται ἐν ταῖς ἀποδεικτικαῖς ἐπιστήμαις t¦ mèn ἴδια ἑκάστης ἐπιστήμης τὰ δὲ κοινά, koin¦ dè κατ' ἀναλογίαν, ἐπεὶ χρήσιμόν γε ὅσον ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ἐπιστήμην γένει· ‡dia mèn οἷον γραμμὴν εἶναι τοιανδὶ καὶ τὸ εὐθύ, koin¦ dè οἷον τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἂν ἀφέλῃ, ὅτι ἴσα τὰ λοιπά. ἱκανὸν δ' ἕκαστον τούτων ὅσον ἐν τῷ γένει· ταὐτὸ γὰρ ποιήσει, κἂν μὴ κατὰ πάντων λάβῃ ἀλλ' ἐπὶ μεγεθῶν μόνον, τῷ δ' ἀριθμητικῷ ἐπ' ἀριθμῶν.

Ἔστι δ' ‡dia mèn καὶ ἃ λαμβάνεται εἶναι, περὶ ἃ ἡ ἐπιστήμη θεωρεῖ τὰ ὑπάρχοντα καθ' αὑτά, οἷον μονάδας ἡ ἀριθμητική, ¹ dè γεωμετρία σημεῖα καὶ γραμμάς. ταῦτα γὰρ λαmb£nousi tÕ εἶναι καὶ τοδὶ εἶναι. t¦ dè τούτων πάθη καθ' αὑτά, t..mèn σημαίνει ἕκαστον, λαμβάνουσιν, οἷον ἡ mèn ἀριθμητικὴ τί περιττὸν ἢ ἄρτιον ἢ τετράγωνον ἢ κύβος,

[1] dὲ γεωμετρία τί τὸ ἄλογον ἢ τὸ κεκλάσθαι ἢ νεύειν, ὅτι δ' ἔστι, δεικνύουσι διά τε τῶν κοινῶν καὶ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων. καὶ ἡ ἀστρολογία ὡσαύτως. πᾶσα γὰρ ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη περὶ τρία ἐστίν, Ósa te eἶναι τίθεται (ταῦτα δ' ἐστὶ τὸ γένος, οὗ τῶν καθ' αὑτὰ παθημάτων ἐστὶ θεωρητική), καὶ τὰ κοινὰ λεγόμενα ἀξιώματα, ἐξ ὧν πρώτων ἀποδείκνυσι, καὶ τρίτον τὰ πάθη, ὧν τί σημαίνει ἕκαστον λαμβάνει. ™n.aj mšntoi ™pist»maj oÙdὲν κωλύει ἔνια τούτων παρορᾶν, oŒn tÕ gšnoj m¾ Øpot.qesqai eἶναι, ἂν ᾖ φανερὸν ὅτι ἔστιν (οὐ γὰρ ὁμοίως δῆλον ὅτι ἀριθμὸς ἔστι καὶ ὅτι ψυχρὸν καὶ θερμόν), καὶ τὰ πάθη μὴ λαμβάνειν τί σημαίνει, ἂν ᾖ δῆλα· ésper oÙdὲ τὰ κοινὰ οὐ λαμβάνει τί σημαίνει τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἀφελεῖν, ὅτι γνώριμον. ἀλλ' oÙdὲν ἧττον τῇ γε φύσει τρία ταῦτά ἐστι, περὶ ὅ τε δείκνυσι καὶ ἃ δείκνυσι καὶ ἐξ ὧν.

Οὐκ ἔστι δ' ὑπόθεσις οὐδ' αἴτημα, Ö ¢n£gkh eἶναι δι' αὑτὸ καὶ δοκεῖν ἀνάγκη. οὐ γὰρ πρὸς τὸν ἔξω λόγον ἡ ἀπόδειξις, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἐν τῇ ψυχῇ ™peˆ oÙdὲ συλλογισμός. ἀεὶ γὰρ ἔστιν ἐνστῆναι πρὸς τὸν ἔξω λόγον, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἔσω λόγον οὐκ ἀεί. Ósa mὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας, ταῦτ', ™¦n mὲν δοκοῦντα λαμβάνῃ τῷ μανθάνοντι, ὑποτίθεται, καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον, ¨n dὲ ἢ μηδεμιᾶς ἐνούσης δόξης ἢ καὶ ἐναντίας ἐνούσης λαμβάνῃ τὸ αὐτό, αἰτεῖται. καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα· ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ, ἢ ὃ ἄν τις ἀποδεικτὸν ὂν λαμ-

βάνῃ καὶ χρῆται μὴ δείξας.

Of mὲν οὖν ὅροι οὐκ εἰσὶν ὑποθέσεις (oÙdὲν γὰρ εἶναι ἢ μὴ λέγεται), ἀλλ' ἐν ταῖς προτάσεσιν αἱ ὑποθέσεις, τοὺς δ' ὅρους μόνον ξυνίεσθαι δεῖ· τοῦτο δ' οὐχ ὑπόθεσις (εἰ μὴ καὶ tÕ ¢koÚein ØpÒqes.n tij eἶναι φήσει), ἀλλ' ὅσων ὄντων τῷ ™ke‹na eἶναι γίνεται τὸ συμπέρασμα. (οὐδ' ὁ γεωμέτρης ψευδῆ ὑποτίθεται, ésper tinὲς ἔφασαν, λέγοντες ὡς οὐ δεῖ τῷ ψεύδει χρῆσθαι, tÕn dὲ γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιαίαν τὴν οὐ ποδιαίαν ἢ εὐθεῖαν τὴν γεγραμμένην οὐκ εὐθεῖαν οὖσαν. Ð dὲ γεωμέτρης οὐδὲν συμπεραίνεται τῷ τήνδε εἶναι γραμμὴν ἣν αὐτὸς ἔφθεγκται, ἀλλὰ τὰ διὰ τούτων δηλούμενα.) ἔτι τὸ αἴτημα καὶ ὑπόθεσις πᾶσα ἢ ὡς ὅλον ἢ ὡς ἐν μέρει, οἱ δ' ὅροι οὐδέτερον τούτων.

Ανάλυση στα «Αναλυτικά Ύστερα» 76^{α}31-77^{α}4 του Αριστοτέλους

Στα «Αναλυτικά Ύστερα» ο Αριστοτέλης παρουσιάζει τις γενικές αρχές πρότυπα που θα πρέπει να εκπληροί κάθε επιστήμη. Πρόκειται για εξαιρετικής σημασίας έργο, καθώς εναργέστατα ο «Θείος» Αριστοτέλης παρουσιάζει τις θεμελιώδεις δομές των επιστημών, οι οποίες κατ΄ ουσίαν είναι ίδιες.

Λέει:

Ονομάζω **αρχές σε κάθε γένος** εκείνες για τις οποίες το ότι υπάρχουν **δεν** μπορεί να αποδειχθεί. Το τι λοιπόν σημαίνουν οι όροι «πρώτες αρχές» καθώς και «οι ιδιότητες που απορρέουν από αυτές» θεωρείται ως δεδομένο. Ως προς **το ότι όμως υπάρχουν** , για μεν τις αρχές

θεωρείται κατ΄ ανάγκην δεδομένο, ενώ για τα άλλα **θα πρέπει να αποδεικνύεται.** Γι παράδειγμα το τι είναι η μονάδα ή τι είναι ευθύ ή τρίγωνο, (αυτά είναι δεδομένα) . Και ενώ είναι δεδομένη η ύπαρξη του της μονάδας και του μεγέθους, **η ύπαρξη των λοιπών θα πρέπει να αποδεικνύεται.**

Από τις αρχές που χρησιμοποιούμε στις αποδεικτικές επιστήμες, άλλες ανήκουν **αποκλειστικά** σε κάθε επιστήμη, και άλλες είναι **κοινές.** Και βέβαια πρέπει να χρησιμοποιούνται από κοινού, κατ΄ αναλογίαν , επειδή χρησιμοποιούνται στο μέτρο μόνο που εμπίπτουν στο γένος που ανήκει η κάθε επιστήμη.

Παράδειγμα αποκλειστικής αρχής, είναι το ότι η «γραμμή» και το «ευθύ» είναι το τάδε συγκεκριμένο πράγμα και κοινή αρχή είναι ότι **αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, τα υπολειπόμενα θα είναι ίσα.** . Από αυτές όμως τις αρχές, ισχύει μόνο ένα μέρος, όσο κάθε φορά αρμόζει στο δεδομένο γένος. Ο Γεωμέτρης την εφαρμόζει μόνο στα μεγέθη ή άλλος την εφαρμόζει μόνο στους αριθμούς.

Επίσης είναι **αποκλειστικά** για κάθε επιστήμη , και τα αντικείμενα που εκλαμβάνει ως **υπαρκτά,** και αυτά τα οποία μελετά ως προς τις **ιδιότητές τους**. , όπως για παράδειγμα οι μονάδες για την αριθμητική και οι γραμμές ή τα σημεία για την γεωμετρία. . Πράγματι, για τα αντικείμενα αυτά είναι δεδομένο το ότι υπάρχουν καθώς και ότι είναι συγκεκριμένα. Σε σχέση όμως με τις ιδιότητές τους, μόνο το **τι σημαίνει** η κάθε μία ιδιότητα θεωρείται ως δεδομένο. Για παράδειγμα θεωρείται ως δεδομένο από την Αριθμητική, το τι σημαίνει περιττός ή άρτιος ή τετράγωνο ή κύβος. Και για την Γεωμετρία το τι είναι χωρίς λόγο, ή τεθλασμένη ή η νεύσις. Το ότι αυτά υπάρχουν , αποδεικνύεται μόνο μέσα από τις κοινές τους αρχές αλλά και από τα συμπεράσματά τους που έχουν ήδη

αποδειχθεί. Το ίδιο ισχύει και για την αστρολογία. Κάθε λοιπόν αποδεικτική επιστήμη, στρέφεται κυρίως γύρω από τρία πράγματα: **Εκείνα που θεωρεί ότι υπάρχουν** (αυτά είναι το γένος του οποίου εξετάζει τις καθ ΄αυτές ιδιότητες) **τα λεγόμενα κοινά αξιώματα** με βάση τα οποία πραγματοποιείται η απόδειξη (ως πρώτα προκείμενα) και τρίτον **τις ιδιότητες** , για τις οποίες η επιστήμη θεωρεί ως δεδομένο το τι σημαίνουν . Τίποτα ωστόσο δεν εμποδίζει τις επιστήμες να **παραβλέπουν** ορισμένες από αυτές τα τρία αυτά πράγματα. Για παράδειγμα, μπορεί να υποθέτει ότι υπάρχει το γένος, αν είναι πρόδηλο και προφανές ότι υπάρχει (και δεν είναι το ίδιο προφανές ότι υπάρχει αριθμός με το ότι υπάρχει ψυχρό ή θερμό.) . Επίσης η επιστήμη , μπορεί να μην αναφέρει ρητά για το τι σημαίνουν οι ιδιότητες, αν συμβαίνει να είναι προφανείς. Αυτό γίνεται στις κοινές αρχές, όπου γίνεται ρητή μνεία του τι σημαίνει να αφαιρεθούν από ίσα, επειδή αυτό είναι γνωστό.
Σε κάθε περίπτωση, αυτές οι εξαιρέσεις, δεν εμποδίζουν σε τίποτα να είναι τρία τα εκ φύσεως συστατικά μέρη της απόδειξης, δηλαδή:

- **Το αντικείμενο της απόδειξης**
- **Οι προς απόδειξιν ιδιότητες**
- **Οι αποδεικτικές αρχές**

Δεν είναι εξ άλλου ούτε υπόθεση ούτε αίτημα αυτό που υπάρχει από μόνο του και αυτό που θεωρούμε ότι υπάρχει , επειδή η απόδειξη από μόνη της δεν απευθύνεται στον έξω λόγο, αλλά στον λόγο της ψυχής. Και είναι αληθές, ότι μπορεί πάντα κάποιος να προβάλλει ενστάσεις στον εξωτερικό λόγο. Όχι όμως πάντα και στον εσωτερικό. Όσα λοιπόν είναι αποδείξιμα, τα θεωρεί ο δάσκαλος ως δεδομένα , χωρίς να τα αποδείξει , αν συμβεί να τα θεωρεί ως δεδομένα με την συναίνεση του μαθητή . Αποτελούν δε αντικείμενο υποθέσεως και είναι υπόθεσις, όχι με την

απόλυτη έννοια, αλλά αναφορικά μόνο με τον μαθητή. . Αν πάλι συμβαίνει να θεωρεί το ίδιο πράγμα ως δεδομένο ή ο μαθητής δεν έχει καμία γνώμη ή έχει αντίθετη γνώμη σε αυτό, τότε πρόκειται για αίτημα. Και σε ακριβώς αυτό διαφέρουν η υπόθεση από το αίτημα. Δηλαδή, το αίτημα είναι αντίθετο με την γνώμη του μαθητή, ή κάθε πρόταση αποδείξιμη, την οποία κάποιος θεωρεί ως δεδομένη και την χρησιμοποιεί χωρίς απόδειξη. Οι όροι λοιπόν δεν είναι υποθέσεις, διότι δεν λένε τίποτα για το αν κάτι είναι ή δεν είναι , αλλά οι υποθέσεις, είναι στις προτάσεις της κάθε επιστήμης που ανήκουν.
Οι όροι, πρέπει απλώς και μόνο να γίνονται κατανοητοί. Αυτό όμως δεν συνιστά υπόθεση (Εκτός αν κάποιος έλεγε ότι με το να ακούει κάτι , αυτό είναι υπόθεση) Αντίθετα, υποθέσεις είναι όλα εκείνα , τα οποία με το να είναι όπως είναι, μπορεί να παράγεται το συμπέρασμα.
Ούτε πρέπει να λέμε ότι κάνει ψευδείς δηλώσεις ο Γεωμέτρης που διατείνεται ότι μια γραμμή έχει μήκος ένα πόδι , ενώ δεν έχει, ή ότι είναι ευθεία κάτι ,ενώ δεν είναι . Ο Γεωμέτρης, δεν συμπεραίνει το παραμικρό από την συγκεκριμένη γραμμή που μνημονεύει, αλλά συμπεραίνει αποκλειστικά από όσα φανερώνουν τα σχήματά του. Εξ άλλου , κάθε αίτημα και κάθε υπόθεση, νοούνται είτε ως όλον είτε ως μέρος. Ενώ οι ορισμοί δεν είναι ούτε το ένα ούτε το άλλο.

Τοπικα158b24-159a2

Πολλαῖς τε τῶν θέσεων μὴ καλῶς ἀποδιδομένου τοῦ ὁρισμοῦ οὐ ῥᾴδιον διαλέγεσθαι καὶ ἐπιχειρεῖν, oŒon pÒteron ž n ˜n˜ ἐναντίον ἢ πλείω· Ðrisqšntwn dὲ τῶν ἐναντίων κατὰ τρόπον ῥᾴδιον sumbib£sai pÒteron ™ndšcetai ple.w tù aÙtù eἶναι ἐναντία ἢ οὔ. τὸν aÙtÕn dὲ τρόπον καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν ὁρισμοῦ δεομένων. œoike dὲ καὶ

ἐν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι' ὁ ρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον ὅ τι ἡ παρὰ τὴ ν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁ μοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴ ν καὶ τὸ χωρίον. toà dè ὁ ρισμοῦ ῥηθέντος εὐθέως φανερὸ ν τὸ λεγό μενον· τὴ ν γὰρ αὐτὴ ν ἀνταναίρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί· ἔστι δ' ὁ ρισμὸ ς τοῦ αὐτοῦ λό γου οὗτος. ¡ pl îj dè τὰ πρῶτα τῶν στοιχείων tiqemšnwn mèn τῶν ὁ ρισμῶν, οἷον τί γραμμὴ καὶ τί κύκλος, ῥᾷστα δεῖξαι (πλὴ ν οὐ πολλά γε πρὸ ς ἕκαστον ἔστι τούτων ἐπιχειρεῖν διὰ τὸ μὴ πολλὰ t¦ ¢n¦ mšson e‡nai)· ¨n dè μὴ τιθῶνται οἱ τῶν ἀρχῶν ὁ ρισμοί, χαλεπό ν, τάχα δ' ὅ λως ἀδύ νατον. Ðmo.wj dè τού τοις καὶ ἐπὶ τῶν κατὰ τοὺς λό γους ἔχει.

Απόδοση του χωρίου.

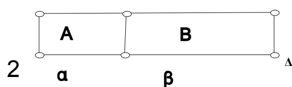
Για πολλές θέσεις - λόγω του ότι δεν έχει αποδοθεί σωστά ο ορισμός- δεν είναι εύκολο να τις συζητήσει κανείς και να τις καταπολεμήσει, όπως για παράδειγμα , αν ένα μοναδικό πράγμα έχει ή όχι περισσότερο από ένα ενάντια. Αν όμως τα ενάντια ορισθούν όπως πρέπει , τότε θα ήταν δυνατόν να συμπεράνει κανείς , αν το ίδιο πράγμα έχει ή όχι, περισσότερα από ένα ενάντια .Με αυτό τον τρόπο χειρίζεται κάποιος και όλα τα άλλα πράγματα που χρειάζονται ορισμό. Φαίνεται και ότι στα Μαθηματικά, **κάποια πράγματα, ένεκα ελλείψεως ορισμού, δεν είναι εύκολο το να γράφονται (εννοεί εδώ για αποδείξεις με γεωμετρικά σχήματα) Για παράδειγμα[1], ότι η τέμνουσα ένα ορθογώνιο**

[1] Κάποιες μεταφράσεις του χωρίου (λ.χ.Αριστοτέλης «άπαντα, Όργανον 3» Εκδόσεις Κάκτος) ερμηνεύουν προφανώς **λανθασμένα** το σχήμα, λαμβάνοντας τον λόγο στον οποίο διαιρεί η παράλληλος την διαγώνιο ίσο

παραλληλόγραμμο, και είναι παράλληλη σε μια πλευρά του, διαιρεί όμοια και την πλευρά και το εμβαδόν[2]. Αν δε δοθεί ρητά ο ορισμός, καθίσταται φανερόν αυτό που λέμε, διότι την ίδια ανταναίρεσιν [3]έχουν τα χωρία και οι γραμμές. Και αυτός είναι ο ορισμός των ίσων λόγων[4]. Κατά απόλυτο τρόπο, είναι πολύ εύκολο να αποδειχθούν οι πρώτες στοιχειώδεις αρχές, από την στιγμή που έχουν δοθεί οι κατάλληλοι ορισμοί, για παράδειγμα το τί είναι η γραμμή και τί ο κύκλος. (Αν και τα επιχειρήματα που μπορεί να επικαλεσθεί κάποιος για κάθε μία

με τον λόγο των εμβαδών . μαθηματικά μεν είναι σωστό, αλλά **δεν προκύπτει από το κείμενο.**



2 

Δηλαδή α/β =Α/Β (=αγ/βγ)

3 Δηλαδή τα έχοντα την ίδια ανθυφαίρεση (=ίδια αμοιβαία αφαίρεση) Ο Πλάτων επίσης χρησιμοποιεί την λέξη ανταναίρεση, αντί για ανθυφαίεση. Σύμφωνα με τον σχολιαστή του Πλάτωνα τον Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα($3^{ο}$ –$4^{ος}$ αιώνας π.Χ.) , ο οποίος σχολιάζει τα «Τοπικά» ο όρος ανταναίρεσις (όρος του Πλάτωνα) είναι η ανθυφαίσεσις.
Σημαντικό είναι που ο Αριστοτέλης δεν επικαλείται άλλους λόγους (όπως έλλειψη αξιωμάτων ή δυσκολίες αποδεικτικές ή μη πληρότητα της θεωρίας, αλλά μόνο την έλλειψη καταλλήλου ορισμού)

4 Δηλαδή αν α, β γραμμές και Α , Β χωρία, τότε (α/β=Α/Β)$\Leftrightarrow$[Ανθ(α,β)=Ανθ(Α,Β)] Αυτό ουσιαστικά συνιστά ορισμό ισότητας λόγων μεταξύ αριθμών γραμμών και μεγεθών . Μάλιστα εδώ συμπεριλαμβάνονται όλες οι ανθυφαιρέσεις περιοδικές ή περατούμενες που ουσιαστικά μπορούν να ορίσουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

από αυτές δεν είναι πολλά , επειδή δεν υπάρχουν πολλά ενδιάμεσα[5])
Αντιθέτως, αν οι ορισμοί δεν έχουν δοθεί, αυτό είναι πάρα πολύ δύσκολο έως αδύνατον.

Όμοια αυτά, παρόμοια ισχύουν και για τους διαλεκτικούς συλλογισμούς.

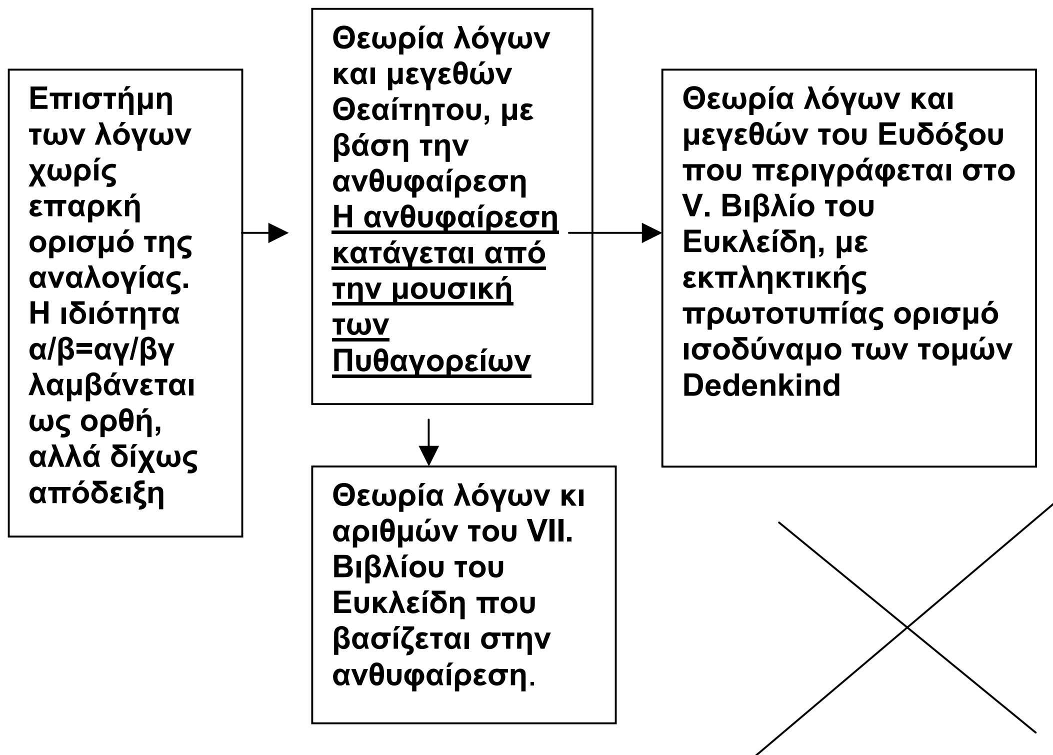
Η θεωρία λόγων , αριθμών και μεγεθών πριν τον Ευκλείδη

Θα πρέπει να φανταστούμε μια περίοδο πριν από τον Ευκλείδη, στην οποία δεν υπήρχε καλός ορισμός της αναλογίας. Πρέπει έτσι να συμπεράνουμε, ότι και με βάση την προαναφερθήσα παρατήρηση του Αριστοτέλη (υποσημειώσεις 2 και 3) ότι υπήρχε μια παλιά χαμένη θεωρία λόγων και μεγεθών , από όπου προέκυψε η θεωρία λόγων και αριθμών του Θεαίτητου με βάση την ανθυφαίρεση.

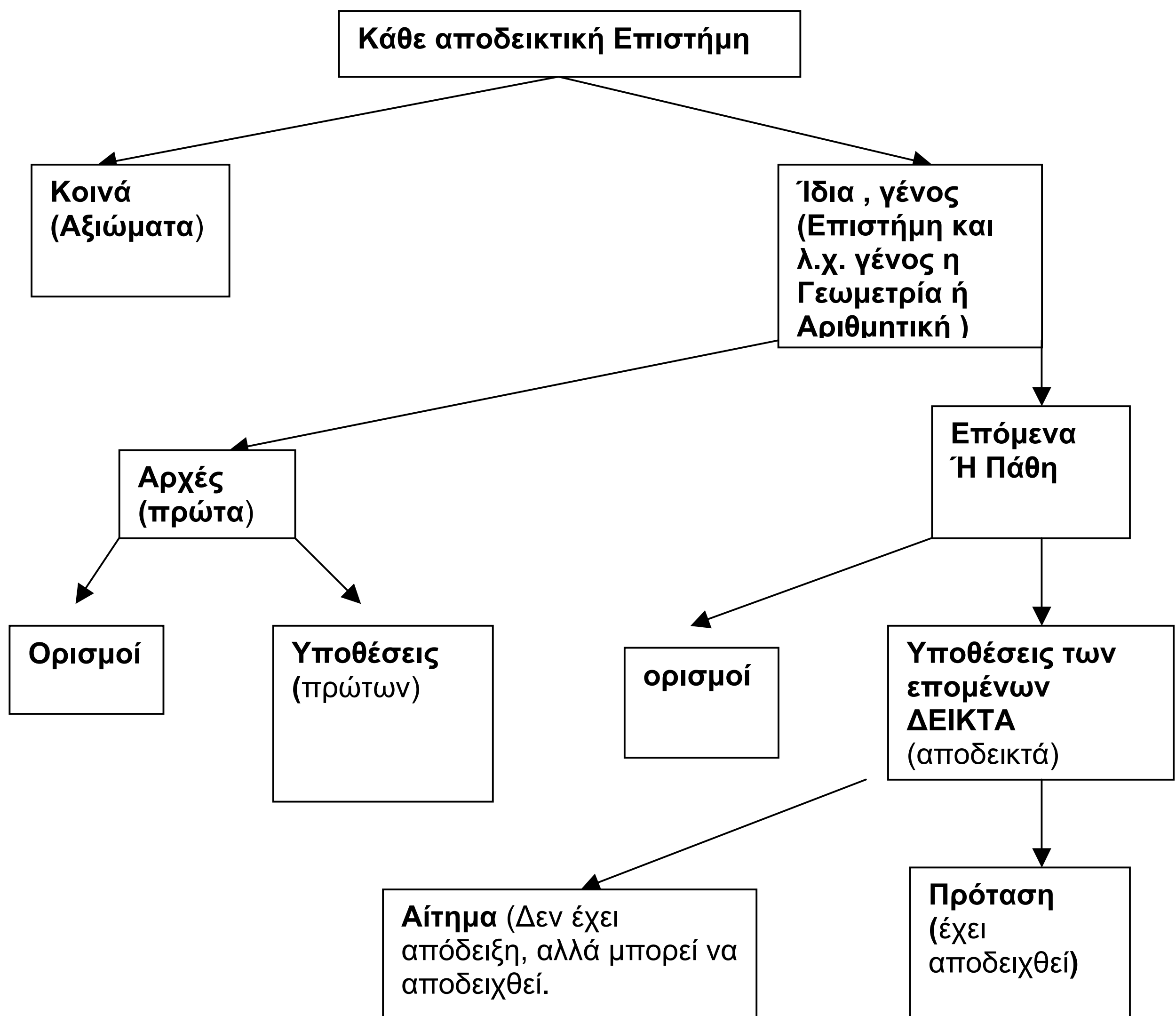
Από αυτήν προέκυψε η θεωρία λόγων του Ευδόξου που παρουσιάζει στο V βιβλίο του ο Ευκλείδης. Η δε θεωρία λόγων που εμφανίζεται στο VII βιβλίο φαίνεται να είναι προκύπτουσα από την θεωρία του Θέωνος .
Σχηματικά έχουμε το εξής:

[5] Εδώ , κατά την γνώμη του γράφοντος, ο Αριστοτέλης εκφράζει μια διαπίστωση που έχομε στα μαθηματικά, δηλ: Όταν μια θεωρία εξελίσσεται, τότε τα πρότερα προβλήματα που λύνονταν με πολλές διαδικασίες και βήματα, τώρα πλέον επιλύονται απλούστερα.

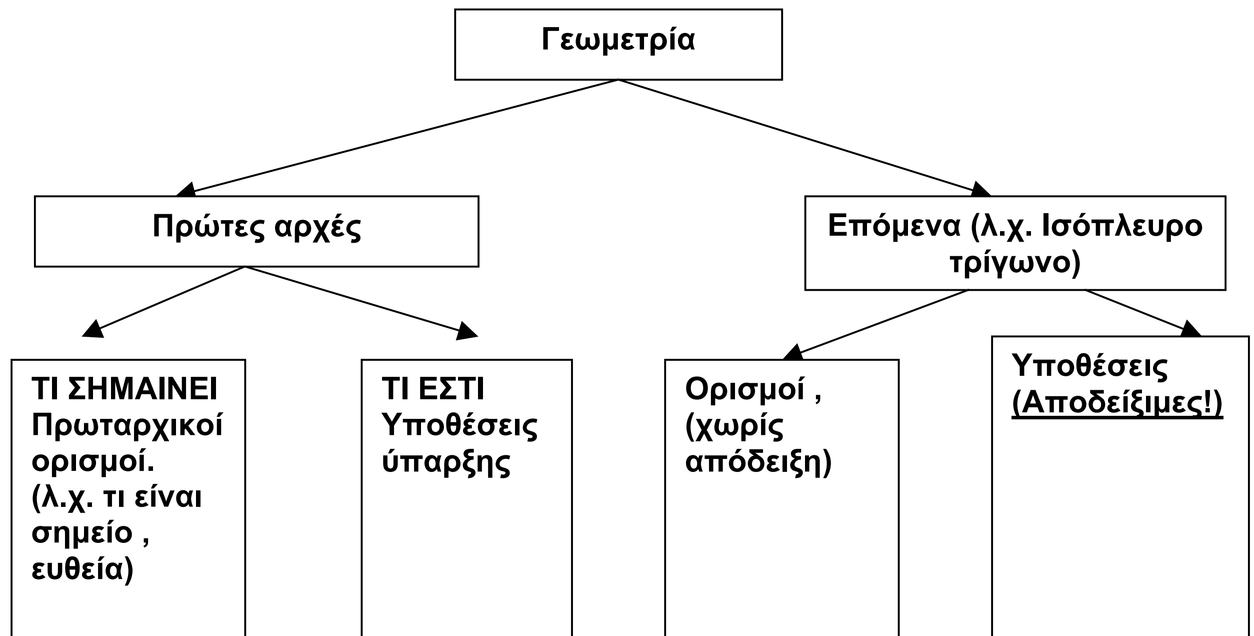
Η εξέλιξη της Θεωρίας λόγων μεγεθών και αριθμών



<u>Σχηματικά οι Αρχές που εισηγείται ο Αριστοτέλης για κάθε επιστήμη και διαφαίνονται στα «Αναλυτικά Ύστερα»</u>



<u>Η παραπάνω δομή του Αριστοτέλους στην περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας</u>



<u>Μια λεπτομερστερη Ανάλυση για τα τρία είδη επιστημονικών αρχών</u>

Ο Αριστοτέλης περιγράφει όπως είδαμε τα είδη των αρχών κάθε αποδεικτικής επιστήμης , ως **Ορισμούς, Υποθέσεις κι Αξιώματα ή κοινές έννοιες**[6] συμπληρώνοντας ότι θέλουν διευκρίνιση:
Έτσι ο Αριστοτέλης, μας λέει διευκρινίζει ότι οι ορισμοί και οι υποθέσεις είναι «ίδιαι αρχαί» ενώ τα αξιώματα είναι κοινά.[7] Με αυτή την διάκριση,

[6](Αναλυτικά Ύστερα 72a 14-21) «Ἀμέσου δ' ἀρχῆς συλλογιστικῆς θέσιν μὲν λέγω ἣν μὴ ἔστι δεῖξαι, μηδ' ἀνάγκη ἔχειν τὸ ν μαθησό μενό ν τι· ἣν δ' ἀνάγκη ἔχειν τὸ ν ὁ τιοῦν μαθησό μενον, ἀξίωμα· ἔστι γὰρ ἔνια τοιαῦτα· τοῦτο γὰρ μάλιστ' ἐπὶ τοῖς τοιού τοις εἰώθαμεν ὄ νομα λέγειν. θέσεως δ' ἡ μὲν ὁ ποτερονοῦν τῶν μορίων τῆς ἀντιφάσεως λαμβάνουσα, οἷον λέγω τὸ εἶναί τι ἢ τὸ μὴ εἶναί τι, ὑ πό θεσις, ἡ δ' ἄνευ τού του ὁ ρισμό ς. ὁ γὰρ ὁ ρισμὸ ς θέσις μέν ἐστι»

εννοεί ότι το αξίωμα χρησιμοποιείται σε περισσότερες από μία επιστήμες, ενώ ορισμοί και υποθέσεις είναι όπως είπαμε ίδιες έννοιες υπό την έννοια του μη κοινές. Ανήκουν λοιπόν σε μία επιστήμη , αφού μία επιστήμη μελετά ένα γένος ή ένα υποκείμενο γένος , το οποίο αποτελείται από τις οντότητες που εξετάζει.(Λ.χ. Οι αριθμοί είναι το υποκείμενο μέγεθος της Αριθμητικής ή στην Γεωμετρία το μέγεθος)

Πιο συγκεκριμένα:

1)για τους ορισμούς

χρησιμοποιεί παρεμφερείς όρους , όπως **Όροι, ορισμοί, τι είναι , τι σημαίνει**. Έτσι ο ορισμός κάποιου πράγματος, θέτει την ουσία του (δηλ. το τι είναι) Γενικότερα στο έργο του ο Αριστοτέλης, θεωρεί ότι οι ορισμοί έχουν την μορφή Γένος συν την ειδοποιό διαφορά.[8] Επίσης οι ορισμοί δεν μπορούν να αποδειχθούν και ότι την αλήθεια τους την θεωρούμε αναγκαία.

2)Για τις υποθέσεις

αντιπαρατίθενται στο οικείο χωρίο των Α.Υ. και χρησιμοποιεί το χαρακτηριστικό παράδειγμα :Η απάντηση στο ερώτημα «Τί είναι η μονάς» , συνιστά τον ορισμό της μονάδος. Το ότι όμως «Υπάρχει μονάς» συνιστά υπόθεση. Δηλαδή ο Αριστοτέλης με τον όρο υπόθεση, περιγράφει τις προϋποθέσεις ύπαρξης. Διευκρινίζει όμως ότι η ύπαρξη των παραγομένων υποκειμένων , ακολουθεί την ύπαρξη των πρωταρχικών. Για παράδειγμα, όταν ο Ευκλείδης στην 3η κοινή έννοια

---

[7] (Αν. Ύστ.76α 37-38) « Ἔστι δ' ïn crîntai ™n ta‹j ¢podeiktika‹j ™pist»maij t¦ mὲν ἴδια ἑκάsthj ™pist»mhj t¦ dὲ κοινά»

[8] Richard Mc Kirahan «Η φιλοσοφία η επιστήμη και τα μαθηματικά τον 4ο αιώνα»σελ. 9 Δευκαλίων18/1 2000 εκδόσεις «Στιγμή»

λέει ότι αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα , τα καταλοιπόμενα θα είναι ίσα, ακολουθεί ουσιαστικά αυτή την απαίτηση του Αριστοτέλη.

Επίσης, η ύπαρξη των ιδιοτήτων αποδεικνύεται, μέσα από την ύπαρξη των υποκειμένων. Για να γίνει αυτό σαφές , για παράδειγμα, αποδεικνύουμε ότι μια ιδιότητα της Γεωμετρίας (όπως η παραλληλία) υπάρχει, όταν αποδείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες.[9]

3) Για τα αξιώματα ή κοινές αρχές:

Είναι οι μόνες αρχές που δεν περιορίζονται αποκλειστικά σε μία μόνο επιστήμη.

Ο Αριστοτέλης δίνει Τρία παραδείγματα επ΄ αυτού:

(i) Την κοινή έννοια 3 του Ευκλείδη
(ii) Τον απαίτηση της μη αντίφασης[10]
(iii) Τον νόμο του αποκλειομένου τρίτου.[11]

Ο Αριστοτέλης , καθιστά σαφές, ότι αυτές οι λογικές αρχές , παρ΄ότι χρησιμοποιούνται ευρέως στις αποδεικτικές επιστήμες, είναι ουσιαστικά αναπόδεικτες.

---

[9] P. N. Kirahan σελ.10

[10] Α.Υ. 76$^{\alpha}$ 10-11 «τὸ dὲ μὴ ἐνδέχεσθαι ἅμα φάναι καὶ ἀποφάναι οὐ δεμίαλαμβάνει ἀπό δειξις»

[11] Α. Υ.77$^{\alpha}$ 12-21 «δείκνυται dὲ λαβοῦσι τὸ πρῶτον κατὰ τοῦ μέσου, ὅ τι ἀληθές, ἀποφάναι δ' οὐ κ ἀληθές. τὸ dὲ μέσον οὐ dὲν διαφέρει εἶναι καὶ μὴ εἶναι λαβεῖν, ὡ ς δ' αὕ τως καὶ τὸ τρίτον. εἰ γὰρ ἐδό θη, καθ' οὗ ἄνθρωπον ἀl hqὲς εἰπεῖν, εἰ καὶ μὴ ἄνθρωπον ἀληθές, ἀλλ' εἰ μό νον ἄνθρωπον ζῷον εἶναι, μὴ ζῷον dὲ μή, ἔσται [γὰρ] ἀl hqὲς εἰπεῖν Καλλίαν, εἰ καὶ μὴ Καλλίαν, ὅ μως ζῷον, μὴ ζῷον δ' οὔ . αἴτιον δ' ὅ τι τὸ πρῶτον οὐ μό νον κατὰ τοῦ μέσου λέγεται ἀλλὰ καὶ κατ' ἄλλου διὰ τὸ εἶναι ἐπὶ πλειό νων, ὥστ' οὐ δ' εἰ τὸ μέσον καὶ αὐ τό ἐστι καὶ μὴ αὐ τό , πρὸ ς τὸ συμπέρασμα οὐ dὲν διαφέρει.

Πριν τον Ευκλείδη;

Ο Thomas Heath εκτιμά , ότι εκτός από την νέα θεωρία που ωφείλετο στον Εύδοξο, και τις συνέπειές της σε όλη την έκταση των Στοιχείων του Ευκλείδη, υπάρχουν λίγα πράγματα που δεν είχαν στις βασικές τους γραμμές συμπεριληφθεί στο αναγνωρισμένο περιεχόμενο της Γεωμετρίας[12] και της Αριθμητικής μέχρι την εποχή του Πλάτωνα. Επί πλέον ο Εύδοδος είχε αναπτύξει την νέα θεωρία της αναλογίας μέχρι την εποχή του Αριστοτέλη. Πρέπει να θεωρείται ότι τα μαθηματικά ήταν εξελιγμένα και η επιτυχία τους πρέπει να αποδοθεί στην συστηματική φύση που είχαν αποκτήσει . Το παράδειγμα της λογικής διάθρωσης των προτάσεων των Στοιχείων είναι αψευδής μάρτυρας περί αυτού. Η Ι.1 των στοιχείων στηρίζεται στα προηγούμενα αξιώματα και ορισμούς, η επομένη στηρίζεται στην Ι.1 τα αξιώματα και τους ορισμούς κ.ο.κ.
Η σκέψη του Αριστοτέλη συνέβαλε τα μάλα σ΄αυτό, αν και πριν την εποχή του Αριστοτέλη, η αυστηρή δομή της διάθρωσης των προτάσεων , αλλά και της ίδιας της αποδεικτικής πορείας , φαίνονται στο μοναδικό διασωζόμενο έργο «Περί κινουμένης σφαίρας» του Αυτόλυκου του Τιτάνεως [13] .
Ακόμα είναι γνωστό ότι στην προευκλείδια γεωμετρία, υπήρχε διάκριση μεταξύ αναποδείκτων αρχών και αποδειξίμων προτάσεων, με ποικίλες αποδεικτικές αρχές. Επίσης και ορισμοί υπήρχαν και αξιώματα όπως μας αναφέρει ο Αριστοτέλης στα Α. Υ. στο υπό εξέτασιν χωρίο αλλά και

[12] P. N. Kirahan σελ.11
[13] P. N. Kirahan σελ.12

αλλού. Παραθέτει δε σποραδικά ορισμούς που ήταν τότε σε χρήση για να ασκήσει κριτική. Εδώ έχει θέση και η κριτική για την ανεπάρκεια του ορισμού της αναλογίας όπου δεν μπορεί να γίνει σύγκριση λόγου γραμμών και λόγου μεγεθών και υποδεικνύει την ίση ανταναίρεση που προείπαμε.

Πρέπει να υποθέσουμε βάσιμα, ότι ο Αριστοτέλης γνώριζε δύο από τα δύο είδη αρχών του Ευκλείδη. Λέγει ρητά ότι οι κοινές αρχές ονομάζονται αξιώματα.

Τα τρία πρώτα αιτήματα, μας δίνουν την δυνατότητα να κατασκευάσουμε συγκεκριμένες γραμμές και κύκλους , σύμφωνα με την γνώμη του Heath που την διετύπωσε στο «Mathimatics in Aristotele (Oxford University Press –1949)[14] Ουσιαστικά δηλαδή, τα τρία πρώτα αξιώματα σχετίζονται με τις αξιώσεις ύπαρξης που έθετε ο Αριστοτέλης, ονομάζοντάς τες υποθέσεις. Διότι ο Ευκλείδης, δεν θέτει αυτά τα τρία αιτήματα με την μορφή ισχυρισμών ύπαρξης, διότι η κατασκευασιμότητα, δεν είναι το ίδιο πράγμα με την ύπαρξη. Αλλά μπορούμε να πούμε, ότι τα τρία πρώτα αιτήματα κατασκευής, εγγυώνται κατ΄ ουσίαν για την ύπαρξη αυτού που κατασκευάζουν. Έτσι, αν εξαιρέσουμε τα δύο τελευταία αιτήματα που δεν είναι κατασκευαστικά, η ακολούθηση των αρχών του Αριστοτέλη από τον Ευκλείδη, είναι σαφεστάτη.[15]

Σε αυτό το σημείο ο R. N. Kirahan (σελ.18) προβληματίζεται για το αν και κατά πόσον , ακριβώς για τον λόγο του ότι η συσχέτιση είναι σαφεστάτη, είναι δυνατόν να επέδρασε τόσο αποφασιστικά ο Αριστοτέλης στον Ευκλείδη, αφού και ο ίδιος επηρεάσθηκε σε ένα βαθμό

[14] Σύμφωνα με την βιβλιογραφική παραπομπή του P. N. Kirahan σελ.13

από τα ήδη γνωστά σε αυτόν μαθηματικά. Έτσι – συνεχίζει ο συγγραφέας- παραμένει πιθανόν ότι όταν συνέθετε τον κατάλογο των αρχών ο Ευκλείδης , να μην ήξερε το τι είχε πει ο Αριστοτέλης και απλώς να ακολούθησε την υπάρχουσα τότε μαθηματική παράδοση. Άλλωστε, υπήρχαν προευκλείδεια «στοιχεία» (Ομώνυμο έργο Ιπποκράτη Χίου –5^{ος} αιώνας) .

Παρ΄ όλες όμως τις επιφυλάξεις που μπορεί να διατυπώσει κάποιος, υπάρχουν ενδείξεις ότι ο Ευκλείδης συνέβαλε στην κατάστρωση των αρχών της γεωμετρίας προσωπικά καθώς και ότι επηρεάσθηκε από τις αρχές της αποδεικτικής επιστήμης, έτσι όπως τις περιέγραψε ο Αριστοτέλης.

Ο Heath σχολιάζει το παρακάτω απόσπασμα του Αριστοτέλη από τα Α.Υ.(65a 4-7) «ὅ περ ποιοῦσιν οἱ τὰς παραλλήλους οἰό μενοι γράφειν· λανθάνουσι γὰρ αὐ τοὶ ἑαυτοὺ ς τοιαῦτα λαμβάνοντες ἃ οὐ χ οἷό ν τε ἀποδεῖξαι μὴ οὐ σῶν τῶν παραλλήλων.» Δηλαδή «είναι αυτό που κάνουν εκείνοι που νομίζουν ότι γράφουν παραλλήλους . Κάνουν λάθος αυτοί και προς τον εαυτό τους με το να παίρνουν ως δεδομένα αυτά που δεν είναι σε θέση να αποδείξουν αν δεν υπάρχουν οι παράλληλες.

Όμως το τέταρτο και το πέμπτο αίτημα λύνουν αυτό το πρόβλημα . Ο Ευκλείδης απαντά σε αυτή την ένσταση του Αριστοτέλη και θέτει τις προϋποθέσεις κατασκευής των παραλλήλων . Το τέταρτο αίτημα λέει ότι όλες οι ορθές είναι ίσες και το πέμπτο κατ΄ ουσίαν είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα των παραλλήλων η οποία έχει ως κριτήριο τις δύο ορθές. Με αυτόν τον τρόπο τίθενται οι προϋποθέσεις κατασκευής των παραλλήλων και έτσι η ένσταση του Αριστοτέλη απαντάται πλήρως.

---

[15] P. N. Kirahan σελ.18 και υποσημείωση 34 στην ίδια σελίδα.

Πολλοί ιστορικοί των μαθηματικών εξ άλλου συμφωνούν , ότι ο Ευκλείδης είναι ο εφευρέτης-επινοητής των δύο τελευταίων αιτημάτων του[16].
Αν υποθέσουμε ότι αυτή η υπόθεση δεν είναι σωστή, και ο Ευκλείδης πήρε τα αιτήματα από κάποια άλλη πηγή των μαθηματικών , τότε πάλι το πιθανότερο είναι , ότι και αυτός ο άγνωστος ουσιαστικά είχε επηρεαστεί από τον Αριστοτέλη. Τείνουμε να πούμε, ότι σε κάθε περίπτωση, ο Αριστοτέλης έπαιξε σημαντικό ρόλο στην θεμελίωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας .
Μια άλλη Αριστοτελική επιρροή στον Ευκλείδη , είναι η λογική αυστηρότητα και τα τρία είδη αρχών. Ακόμα και στα υπόλοιπα συγγράμματα του Ευκλείδη , αλλά και των άλλων σπουδαίων αρχαίων , όπως ο Αρχιμήδης ή ο Απολλώνιος δεν έχομε ανάλογης μορφής αυστηρότητα σε σχέση με τα στοιχεία και αυτά είναι περισσότερο τυπικά.[17]
Ο Πρόκλος μας λέει ευθέως , ότι ο πριν τον Ευκλείδη, οι αποδείξεις ήσαν χαλαρές[18] . Πρέπει έτσι να βγει το συμπέρασμα, ότι ο Ευκλείδης ανέβασε το επίπεδο της μαθηματικής δραστηριότητας της εποχής του , εξ αιτίας των φιλοσοφικών του αναζητήσεων στην λογική και την αξιωματική θεωρία, οι οποίες όμως φωτογραφίζουν πίσω τον Αριστοτέλη.
Ο **R. N. Kirahan ,** εκφράζοντας την προβληματική που έχει αναπτυχθεί από την κριτική των 2000 ετών στο έργο του Ευκλείδη , όπου κάποιοι όροι δεν είναι ορισμοί, κάποιες κοινές έννοιες δεν είναι κοινές , αλλά και

---

[16] π.χ. Ο πλέον έγκυρος , ο Heath , στα Στοιχεία του Ευκλείδη σελ. 202
[17] R. N. Kirahan σελ.19
[18].(Πρόκλος , σχόλια εις τα Στοιχεία σελ.68, 7-11) οὐ πό λυ δὲ τού των νεώτερό ς ἐστιν Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδό ξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύ μενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών.

αιτήματα που δεν σχετίζονται με κατασκευή. Ακόμα υπάρχουν κάποια βήματα στις αποδείξεις που δεν δικαιολογούνται ούτε από τα βήματα ,αλλά και ούτε από τις αρχές που έχουν παρατεθεί. Λόγου χάριν η Ι.1 έχει το πρόβλημα του πώς εξασφαλίζεται η τομή των δύο κύκλων. Έτσι η περίφημη αυστηρότητα του Ευκλείδη φαίνεται να υπονομεύεται.[19]

Ο Hilbert μας λέει ότι η γεωμετρία βασίζεται σε περισσότερες αρχές από όσες έχουν τα Στοιχεία του Ευκλείδη . Επίσης οι τάξεις των αρχών δεν ανταποκρίνονται σε κανένα από τα είδη των αρχών του Ευκλείδη. Λόγου χάριν υπάρχουν αξιώματα συνδέσεως , διατάξεως, ισότητας και το αξίωμα της παραλληλίας που είναι ισοδύναμο με το 5^{ο} αξίωμα του Ευκλείδη και ακόμα το αξίωμα της συνέχειας. Επομένως πως μπορούν να εξηγηθούν τα προβληματικά στοιχεία;

Ο **R. N. Kirahan** δεν διστάζει να προβεί στην εξής ερμηνεία :

1) Ο Ευκλείδης περιόρισε τις αρχές του σε τρεις υπακούοντας στον Αριστοτέλη . Δεν υπήρχε κανένας μαθηματικός λόγος να περιοριστούν τα είδη των αρχών σε τρεις.
2) Πιθανόν , θα ήταν πιο κομψό να υπήρχαν τέσσερις αντί για τρεις. Για παράδειγμα να υπήρχαν οι γνωστές τρεις και επί πλέον όλες οι άλλες προτάσεις που παρουσιάζουν προβληματικό χαρακτήρα . Θα έπρεπε σε αυτή την κατηγορία να υπάρχει η εξασφάλιση της τομής των δύο κύκλων και γενικά να υπάρχουν τα αξιώματα του Hilbert που θεμελιώνουν στέρεα την Γεωμετρία.
3) Ο Ευκλείδης μπορούσε αναμφισβήτητα να θέσει την νέα κατηγορία.

Επομένως το ότι περιορίσθηκε στα τρία είδη αρχών , μας οδηγεί στο να εκφράσουμε , το συμπέρασμα ότι σε αυτή του την επιλογή οδηγήθηκε από την προσήλωσή του στις επιταγές του Αριστοτέλη.

[19] R. N. Kirahan σελ.22

Φαίνεται να επέμεινε στις αρχές του Αριστοτέλη και έθετε τις αρχές όπως του φαινόταν χρήσιμο. Για παράδειγμα, στον ορισμό 2 λέει «γραμμή δε μήκος απλατές» και αμέσως συμπληρώνει μια ιδιότητα της γραμμής αμέσως μετά ως ορισμό 3 «Γραμμής δε πέρατα, σημεία»
Έτσι το 4^{o} και το 5^{o} αίτημα, έχουν σχέση με την κατασκευή των παραλλήλων γραμμών . Επομένως είχε νόημα να τα τοποθετήσει κοντά μαζί με τα αιτήματα κατασκευής.
Εν κατακλείδι, τα φιλοσοφικά ενδιαφέροντα του Ευκλείδη και το ενδιαφέρον του για ζητήματα θεμελίωσης, προϋποθέτουν μια φιλοσοφική πηγή. Αυτή είναι τα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη.

-Τι είναι Γεωμετρία κατά Klein

Γενικά , η άποψη του Klein για την Γεωμερία (~1870)

- Η Γεωμετρία αναπτύσσεται με την βοήθεια νεωτέρων και θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών, όπως οι δομές της ομάδας και του μετρικού χώρου. Έτσι έχομε απαλλαγή από τα δεσμά της εποπτείας , η οποία είτε στον Ευκλείδη, είτε και στον Hilbert ακόμη , παίζει σημαντικό ρόλο.
- Η Γεωμετρία, μπορεί και δίνει ενιαία διατύπωση στα κύρια ζητούμενα επί μέρους περιοχών των μαθηματικών, όπως :
    1. Τοπολογικών και ιδιαίτερα μετρικών χώρων.
    2. Ευκλείδειων διανυσματικών χώρων (με θετικά ορισμένο εσωτ. γινόμενο) και άρα χώρων Ευκλείδειων στο R^n.
- Ψευδοευκλείδιων διαν. Χώρων (δηλ. με όχι θετικά ορισμένο εσωτ. Γινόμενο) όπως ο χώρος Minkowski της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ KLEIN

Έστω σύνολο $X \neq \varnothing$ και

$B(X) \equiv \{f / f : X \to X \text{ με } f \text{"1-1" και επί}\}$.

Μπορεί να αποδειχθεί, ότι το B(X) εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων «$\circ$»είναι ομάδα.

Πράγματι:

Αν $f \in B(X)$ τότε υπάρχει η f^{-1} , η οποία κι αυτή θα είναι 1-1 και επί του X και $f \circ f^{-1} = id_x$ και $id_x(x)=x \ \forall x \in X$ είναι «1-1» και επί του X.

Επίσης η σύνθεση είναι προσεταιριστική πράξη , η σύνθεση δύο $f , g \in X$ «1-1» και επί, η $f \circ g$ είναι επίσης «1-1» και επί και άρα $f \circ g \in X$. Ακόμα $id_x \circ f = f \circ id_x = f \quad \forall f \in X$

Στη συνέχεια θεωρούμε μια υποομάδα της B(X) , την $(G,\circ)$.

Είμαστε έτοιμοι για τον παρακάτω

Ορισμός Γεωμετρίας Klein:

Το ζεύγος (G,X) , καλείται «ΓεωμετρίαKlein» που ορίζεται στο X , από την υποομάδα $(G,\circ)$ της ομάδας $(B(X) , \circ)$.

Τι διερευνά η κάθε Γεωμετρία Klein;

O Klein καθόρισε το αντικείμενο έρευνας της Γεωμετρίας του. Αυτό είναι **η μελέτη των ιδιοτήτων** των **«σχημάτων»**(:=των μη κενών υποσυνόλων) του X οι οποίες παραμένουν **αναλλοίωτες ως προς την G .**

Πότε μια ιδιότητα είναι αναλλοίωτη ως προς την G;

Μια ιδιότητα του «σχήματος» $\Sigma \subseteq X$ θα λέμε ότι παραμένει αναλλοίωτη ως προς G , αν το $f(\Sigma)$ έχει την ιδιότητα αυτή για κάθε $f \in G$.

Μια αυστηρότερη περιγραφή του προηγουμένου:

Αν J είναι ένας προτασιακός τύπος(:=ιδιότητα) με σύνολο αναφοράς το δυναμοσύνολο του X (συμβολιζόμενο με $\mathscr{P}$(X)) και ως σύνολο αληθείας αυτής της ιδιότητας είναι το T(J)={A∈ $\mathscr{P}$(X) : J(A) «αληθές»}

Θα λέμε ότι η J παραμένει αναλλοίωτη για μια f : X→X αν f(A) ∈T(J). Επομένως έχομε τον παρακάτω

Ορισμός: ***Μια ιδιότητα J θα παραμένει αναλλοίωτη ως προς G , αν αυτή παραμένει αναλλοίωτη για κάθε f∈G.***

Επομένως το ζητούμενο από κάθε γεωμετρία Κλάϊν είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των υποσυνόλων του X που παραμένουν αναλλοίωτες ως προς την G .

Για να γίνει αντιληπτή η ευρύτητα μιας τέτοιας άποψης, ας δούμε πώς αυτή εφαρμόζεται σ διάφορα φαινομενικά πεδία των Μαθηματικών:

ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ:

Όταν εισάγουμε μια τοπολογία σε ένα σύνολο, κατ' ουσίαν το εφοδιάζουμε με δυνατότητα ορισμού σύγκλισης ακολουθιών σε αυτό. Άρα μας ενδιαφέρουν οι απεικονίσεις που ***διατηρούν την σύγκλιση***, (Αν μια ακολουθία συγκλίνει στο u , τότε και η ακολουθία των εικόνων των όρων της ακολουθίας μέσω της f , να συγκλίνει στην εικόνα του u =: f(u))

Αυτές είναι οι συνεχείς απεικονίσεις.

Αλλά για να έχουν δομή ομάδας, θα πρέπει να αντιστρέφονται, άρα περιοριζόμεθα στο σύνολο των ομοιομορφισμών του X , δηλαδή στο σύνολο :

H(X) ={f/f :X→X με f "1-1" και «επί» και f , f^{-1} συνεχείς}

Εύκολα προκύπτει , ότι η (H(X), ∘) είναι υποομάδα της (B(X), ∘)

(Η ταυτοτική απεικόνιση είναι συνεχής και η σύνθεση συνεχών είναι συνεχής)

Άρα το (H(X), X) είναι μια γεωμετρία Κλάϊν.

Όταν μελετάμε αυτήν, κατ' ουσίαν μελετάμε τον τοπολογικό χώρο X.

Παράδειγμα ιδιότητας που παραμένει αναλλοίωτη ως προς την H(X) είναι η συμπάγια

(Η εικόνα συμπαγούς συνόλου μέσω συνεχούς «1-1» και «επί» είναι συμπαγές σύνολο.)

ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Μια μετρική d σε ένα σύνολο $X \neq \varnothing$, ουσιαστικά είναι ο εφοδιασμός του με την έννοια της απόστασης μεταξύ των σημείων του. Επίσης , επάγεται σε αυτό μια τοπολογία με περιοχές τις σφαίρες ως προς την μετρική d .

Από τις απεικονίσεις f : X→X μας ενδιαφέρουν αυτές που διατηρούν την απόσταση, δηλαδή οι **ισομετρίες.**

(Μια απεικόνιση f : X→X θα λέγεται ισομετρία , αν (d(f(x), f(y))=d(x,y) $\forall x, y \in X$ *)*

Οι παραπάνω απεικονίσεις είναι «1-1» (απλή η απόδειξη με χρήση του ορισμού της ισομετρίας: Αν f(x)=f(y) τότε 0=d(f(x), f(y))=d(x,y)→x=y)

Για να έχουν οι παραπάνω απεικονίσεις δομή ομάδας ,περιοριζόμαστε στο σύνολο :

$I_d(X) = \{f / f : X \to X$ με f ισομετρία & «επί» $\}$

Το παραπάνω σύνολο εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων είναι υποομάδα της B(X) (με πράξη την σύνθεση)

Άρα το ζεύγος ($I_d(X)$, X) είναι μια Γεωμετρία Κλάϊν , και όταν μελετάμε την Γεωμετρία αυτή, κατ' ουσίαν μελετάμε τον μετρικό χώρο (X , d)

Παράδειγμα ιδιότητας που παραμένει αναλλοίωτη ως προς την ομάδα $I_d(X)$ αποτελεί το φραγμένον ενός υποσυνόλου του X.

(Αν Α φραγμένο, τότε υπάρχει ε>0 : d(x,y)<ε για κάθε x,y ∈X. Αφού d(f(x), f(y))=d(x,y) → d(f(x), f(y))<ε . Συνεπώς η εικόνα φραγμένου μέσω ισομετρίας είναι φραγμένο)

-Η Γεωμετρία Klein του Ευκλείδειου επιπέδου.

Εισαγωγικά :

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία όπως γνωρίζουμε, μελετά τις ιδιότητες των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες ως προς το «είδος» των σχημάτων.Για παράδειγμα:

- Όλα τα τρίγωνα έχουν άθροισμα γωνιών 180 μοίρες .
- Οι διαγώνιοι όλων των παραλληλογράμμων διχοτομούνται.

- Σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Κ.ο.κ.

Αυτές οι ιδιότητες , που αφορούν ένα είδος σχήματος, νομιμοποιούνται αν αποδειχθεί η ισχύς τους για κάθε αντιπροσωπό τους .

Είναι αυτό που κάνομε λέγοντας λ.χ. «έστω ορθογώνιο τρίγωνο» το οποίο σχεδιάζομε στον πίνακα και για το οποίο αν αποδείξομε την ισχύ μιας ιδιότητάς του, τότε αυτή δεν θα ισχύει μόνο γι' αυτό, αλλά για όλη την κλάση των ορθογωνίων τριγώνων που αντιπροσωπεύει.

Σχεδόν πάντα η απόδειξη ιδιοτήτων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ανάγεται στην απόδειξη ή διαπίστωση ότι κάποια άλλα σχήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Έτσι έχομε το γνωστό:

Ίσα είναι δύο σχήματα, αν με κατάλληλη επίθεση μπορέσουν να ταυτιστούν.

Εννοείται πάντα αξιωματικά, ότι:

Τα ίσα σχήματα , διατηρούν τις ιδιότητές τους κατά την μετακίνησή τους στο επίπεδο . Δηλαδή, οι ιδιότητες αυτών των σχημάτων παραμένουν αναλλοίωτες κατά την μετακίνηση στο επίπεδο.

Όλα τα παραπάνω διαισθητικά , κατοχυρώνονται με την αλγεβροποίησή της , μέσω της άποψης του Κλάϊν .

Με άλλα λόγια, αν με d_E συμβολίσω την γνωστή Ευκλείδεια μετρική που προκύπτει από την γνωστή Ευκλείδεια απόσταση του κλασικού Πυθαγορείου θεωρήματος, τότε, Με το σύμβολο

$\mathrm{I}_{d_{\mathrm{E}}}$ θα συμβολίζομε το σύνολο των ισομετριών πάνω στο Ευκλείδειο επίπεδο Αν μάλιστα θεωρήσω και τον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^2, d_E)$, Τότε η γεωμετρία Κλάϊν του Ευκλείδειου επιπέδου είναι το ζεύγος:

$$\mathrm{I}_{d_{\mathrm{E}}}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$$

Περισσότερο εποπτικά έχω τις παρακάτω αντιστοιχίσεις ανάμεσα στην κλασική και την νεωτεριστική άποψη του Κλάϊν:

Ευκλείδειο Επίπεδο $\longleftrightarrow$ Χώρος $\mathbb{R}^2$

Ευκλείδειο σχήμα Σ $\longleftrightarrow$ $\varnothing \neq \Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$

Μετακίνηση σχήματος Σ $\longleftrightarrow$ εφαρμογή μιας ισομετρίας στο Σ

Επίθεση σχημάτων Σ_1 ,Σ_2 $\longleftrightarrow$ Εύρεση μιας ισομετρίας f :
. $f(\Sigma_1)=\Sigma_2$

Άρα το χαρακτηριστικό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι το αναλλοίωτον μέσω των ευκλείδειων ισομετριών.

Προείπαμε , ότι δύο σχήματα Σ_1και Σ_2 είναι ίσα κατά Κλάϊν, αν υπάρχει ισομετρία g η οποία να απεικονίζει το Σ_1 στο Σ_2

Δηλ. αν υπάρχει g : $g(\Sigma_1)= \Sigma_2$

Συμβολικά την ισότητα δύο σχημάτων μπορούμε να την παραστήσουμε με το σύμβολο «~» και να γράφουμε $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ Εννοώντας ότι τα δύο σχήματα είναι ίσα σύμφωνα με την Ευκλείδεια αντίληψη.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> ***Η σχέση «~» είναι σχέση ισοδυναμίας***

Αποδειξη:

✓ Είναι αυτοπαθής:

$1_\chi(\Sigma)=\Sigma$ για κάθε Σ υποσύνολο του Χ ,

όπου η 1_χ : Χ → Χ η ταυτοτική απεικόνιση του Χ.

και $1_\chi \in G$ αφού η G είναι υποομάδα της ομάδας των ισομετριών στο Χ. Δηλ. συμβολικά: IS(X) .

✓ Είναι συμμετρική

Έστω $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$. Τότε $\exists g : g(\Sigma_1) = \Sigma_2$. Αλλά αφού η g είναι ισομετρία είναι και 1-1 , είναι και «επί» , άρα

$$\exists\, g^{-1} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; g^{-1}g(\Sigma_1) = g^{-1}(\Sigma_2) \Rightarrow$$

$$1_\chi(\Sigma_1) = g^{-1}(\Sigma_2) \Rightarrow$$

$$\Sigma_1 = g^{-1}(\Sigma_2) \Rightarrow$$

$$\Sigma_2 \sim \Sigma_1$$

Με το δεδομένο ότι η $g^{-1} \in G$, αφού η G είναι υποομάδα της ομάδας των ισομετριών στο X (IS(X))

- ✓ Τέλος η σχέση «~» είναι και μεταβατική , αφού

$$\text{αν} \quad \Sigma_1 \sim \Sigma_2 \quad \kappa\alpha\iota \ \Sigma_2 \sim \Sigma_3 \quad \tau o \tau \varepsilon$$

$$\exists \ g_1, g_2 \in G : g_1(\Sigma_1) = \Sigma_2 \kappa\alpha\iota$$

$$g_2(\Sigma_2) = \Sigma_3. \quad T o \tau \varepsilon, g_2 \circ g_1(\Sigma_1) =$$

$$g_2 \circ (g_1(\Sigma_1)) = g_2(\Sigma_2) = \Sigma_3 \Rightarrow$$

$$\Sigma_1 \sim \Sigma_3$$

Αφού $g_2 \circ g_1 \in G$ δεδομένου ότι οι g_1 και g_2 ανήκουν στην G που είναι υποομάδα και άρα θα ανήκει και η σύνθεσή τους .

Επομένως από το προηγούμενο, φαίνεται ότι η επιλογή του Κλάϊν να εχει η δομή G δομή υποομάδας, δεν είναι τυχαία.

<u>Επομένως τι το ενδιαφέρον έχω μέχρι στιγμής;</u>

- ✓ Απαλλάσσεται η Γεωμετρία από την εποπτεία, αλλά πρέπει να μπορεί κάθε φορά να βρίσκεται η g με την οποία θα μας επιτρέπεται να αποφαινόμεθα αν δύο σχήματα είναι ίσα ή όχι.
- ✓ Δημιουργείται πρόσφορο έδαφος για την μελέτη της Γεωμετρίας R^n με n >3 όπου παύει η εποπτεία.
- ✓ Επειδή ο R^n είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n δημιουργείται η ιδέα θεώρησης και άλλων Γεωμετριών.

πάνω σε οποιονδήποτε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης ο οποίος μπορεί να ταυτιστεί μέσω ισομορφισμού με το R^n .

Ποιες όμως είναι αυτές οι ισομετρίες του επιπέδου;

Πριν φθάσουμε σε ένα σπουδαίο θεώρημα, παράστασης των ισομετριών, θα δώσουμε κάποιες βοηθητικές προτάσεις

ΠρότασηΙ:

Μια απεικόνιση f: V→V που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, [,] στον V , (δηλαδή [χ, ψ]=[f(x),f(ψ)] για κάθε χ, ψ στον V) είναι γραμμική

Απόδειξη:

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύουν οι ισότητες:

F(x+ψ)=f(χ)+f(ψ)   και f(λχ)=λf(χ)

Για την απόδειξη της δεύτερης, πρέπει και αρκεί να δείξω ότι : [f(λχ) – λ f(x) , f(λχ)- λf(χ)]=0 . (1)

Αυτό, διότι λόγω του ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικά ορισμένο η (1) ⇔ f(λχ)- λf(χ)=0 ⇔ f(λχ)= λf(χ).

Πράγματι , έχω:

[f(λχ) – λ f(x) , f(λχ)- λf(χ)]=

[f(λχ) , f(λχ)- λf(χ)]-[λ f(x) , f(λχ)- λf(χ)]=

[f(λχ) , f(λχ)]-[f(λχ) , λf(χ)]-[λ f(x) , f(λχ)]+[λ f(x) , λf(χ)]=

[f(λχ) , f(λχ)]-λ[f(λχ) , f(χ)]-λ[f(x) , f(λχ)]+λ^2[f(x) , f(χ)] =

[λχ ,λχ]-λ[f(λχ) , f(χ)]-λ[f(λχ) , f(x)]+λ^2[f(x) , f(χ)] =

$\lambda^2[\chi , \chi]-2\lambda[\lambda\chi , \chi]+\lambda^2[x , \chi]$ = (Διατήρηση εσωτ. Γινομένου)

$2\lambda^2[\chi , \chi]-2\lambda[\lambda\chi , \chi]$ =

$2\lambda^2[\chi , \chi]-2\lambda^2[\chi , \chi] = 0$

Επίσης , με ανάλογο τρόπο θα αποδείξω ότι

$[f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi) , f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi)]=0$ (2)

πράγματι, αν αποδειχθεί η (2) τότε, από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, θα έχω ότι η (2)

$\Leftrightarrow f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi) =0$

$\Leftrightarrow f(\chi+\psi) =f(x)+f(\psi)$

Πράγματι, έχω:

$[f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi) , f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi)]=$

$[f(\chi+\psi), f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi)]+[-f(x)-f(\psi), f(\chi+\psi) -f(x)-f(\psi)]=$

$[f(\chi+\psi), f(\chi+\psi)]+[f(\chi+\psi) , -f(x)-f(\psi)] +[-f(x)-f(\psi) -f(x)-f(\psi)]$
$+[-f(x)-f(\psi), f(\chi+\psi)]=$

$[\chi+\psi,\chi+\psi]-[\chi+\psi,\chi]-[\chi+\psi,\psi]+(-1)^2[+f(x)+f(\psi) ,+f(x)+f(\psi)]=$

$[\chi+\psi,\chi+\psi]-[\chi+\psi,\chi]-[\chi+\psi,\psi]+ [+f(x) ,+f(x)+f(\psi)] +[f(\psi) ,+f(x)+f(\psi)]=$

$[\chi+\psi,\chi+\psi]-[\chi+\psi,\chi]-[\chi+\psi,\psi]+ [f(x) ,f(x)][f(x),f(\psi)] +[f(\psi) ,+f(x)]+[f(\psi) ,f(\psi)]=$

$[\chi+\psi,\chi+\psi]-[\chi+\psi,\chi]-[\chi+\psi,\psi]+ [x ,x]+[x,\psi] +[\psi,x]+[\psi ,\psi]=$

$[\chi+\psi,\chi+\psi]-[\chi+\psi,\chi]-[\chi+\psi,\psi]+ [x ,x]+[x,\psi] +[\psi,x]+[\psi ,\psi]=$

[χ,χ]+[χ,ψ]+[ψ,χ]+[ψ,ψ]-[χ,χ]-[ψ,χ]-[χ,ψ]-[ψ,ψ]-[ψ,ψ]-[χ,χ]+
[x ,x]+[x,ψ] +[ψ,x]+[ψ ,ψ]=0

Άρα κάθε απεικόνιση που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμική.---

<u>Πρόταση ΙΙ</u>

Αν ο Χ είναι ένας γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο [,] και f είναι μια γραμμική απεικόνιση f:X→X , τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(ι) Η f είναι γραμμική και ισομετρία

(ιι) Η f είναι ισομετρία και ισχύει f(0)=0

<u>Απόδειξη:</u>

$\xrightarrow[(\iota)-->(\iota\iota)]{}$

Αν είναι γραμμική &ισομετρία τότε είναι φυσικά ισομετρία και λόγω γραμμικότητας ισχύει:

$f(0+0)=f(0)+f(0) \Rightarrow$

$f(0)=f(0)+f(0) \Rightarrow$

$f(0)=0$

$\xrightarrow[(\iota\iota)-->(\iota)]{}$

Αφού η f είναι ισομετρία , πρέπει να δείξω ότι είναι και γραμμική απεικόνιση.

Αν δείξω ότι η ισομετρία διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, τότε θα είναι γραμμική , σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση!

Επομένως, πρέπει κι αρκεί να δείξουμε, ότι η f ως ισομετρία διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο.

Πράγματι:

Εξ ορισμού ισομετρία σημαίνει ότι

$$\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\| \quad \forall\, x, y \in X \quad (1)$$

Για χ=0 η (1) σημαίνει ότι :

$$\|f(x)-f(0)\| = \|x-0\| \quad \forall\, x, 0 \in X \Rightarrow \text{(υπόθεση f(0)=0)}$$

$$\|f(x)-0\| = \|x-0\| \quad \forall\, x, 0 \in X \Rightarrow$$

$\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall\, x, \in X$ Δηλαδή η f διατηρεί την νόρμα.

Όμως για κάθε χ, y $\in X$ έχω:

$$[f(x)-f(y),f(x)-f(y)]=\|f(x)-f(y)\|^2=$$

$$\|x-y\|^2=$$

$$[x-y,x-y]=$$

$$[x,x]-2[x,y]+[y,y]=$$

$$\|x\|^2-2[x,y]+\|y\|^2=(\eta\ f\ \iota\alpha\tau\eta\rho\epsilon\iota\,\tau\eta\nu\,\nu o\rho\mu\alpha)$$

$$\|f(x)\|^2-2[x,y]+\|f(y)\|^2$$

$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta\,\tau\epsilon\lambda\iota\kappa\alpha\ \epsilon\chi\omega:$

$$[f(x)-f(y),f(x)-f(y)]=\|f(x)\|^2-2[x,y]+\|f(y)\|^2$$

(*)

Αλλά ισχύει ακόμα:

$$[f(x)-f(y),f(x)-f(y)]=[f(x),f(x)]-2[f(x),f(y)]+[f(y),f(y)]=$$

$$\|f(x)\|^2-2[f(x),f(y)]+\|f(x)\|^2\ (**)$$

Από (*) και (**) έχω:

Τα πρώτα μέλη ίσα άρα και τα δεύτερα και με διαγραφή των ίσων παίρνω

[f(x),f(y)]=[x,y] δηλαδή η f διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή είναι γραμμική.---

<u>Ορισμός Ι :</u> ***Μεταφορά*** *κατά διάνυσμα*

$a \in V$ $\varepsilon\iota\nu\alpha$ "$1-1$" $\kappa\alpha\iota\,\varepsilon\pi\iota\,\alpha\pi\varepsilon\iota\kappa o\nu\iota\sigma\eta$ $f_a : V --> V$

$,\pi o\upsilon\, o\rho\iota\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\,\alpha\pi o\,\tau\eta\nu\,\iota\sigma o\tau\eta\tau\alpha$

$f_a(x) = x + a$ $\quad\Pi\rho o\kappa\varepsilon\iota\tau\alpha\iota\,\gamma\iota\alpha\,\iota\sigma o\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha:$

$$d(f_a(x), f_a(y)) = \|f_a(x) - f_a(y)\| = \|(x+a) - (y+a)\| =$$

$$\|x - y\| = d(x, y)$$

<u>Ορισμός ΙΙ:</u> ***Ορθογώνια απεικόνιση*** *λέγεται κάθε απεικόνιση f:V→V , που είναι γραμμική και ισομετρία (και συνεπώς «1-1» και «επί»)*

<u>Θεώρημα παράστασης των Ισομετριών</u>

Έστω (V, E) ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Σε κάθε ισομετρία του f: V→V αντιστοιχεί μονοσήμαντα : Μία ορθογώνια απεικόνιση g: V→V και μια μεταφορά f_α :V→V έτσι ώστε να ισχύει : $f=f_\alpha \circ g$.

<u>Απόδειξη:</u>

Θεωρώ την απεικόνιση g(x) =f(x)-f(0) . Αυτή είναι ορθογώνια. Πράγματι για την g ισχύει :

Για x=0 , g(0)=f(0)-f(0) , άρα g(0)=0 .

Επίσης:

$$\|g(x)-g(y)\| = \|(f(x)+f(0))-(f(y)+f(0))\| =$$
$$\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$$

Δηλαδή η g είναι ισομετρία. Σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα , η g θα είναι και γραμμική απεικόνιση.Δηλαδή τελικώς ορθογώνια απεικόνιση.

Επίσης θεωρώ την μεταφορά f_α *: για* $\alpha = f(0)$.

Για την ορθογώνια απεικόνιση g και για την μεταφορά f_α, ισχύει:

$(f_\alpha \circ g)(x) = f_\alpha(g(x)) = g(x)+f(0) = f(x) \ \forall x \in V$

Απόδειξη του μονοσημάντου του ορισμού των g και f_α

Θα κάνουμε την απόδειξη με την απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι υπάρχουν και δύο άλλες διαφορετικές απεικονίσεις, μια ορθογώνια g_1 και μια μεταφορά f_b για τις οποιες να ισχύει:

$g_1 \circ f_b = f$

Τότε:f(x)=f(x) $\Leftrightarrow$

$(g_1 \circ f_b)(\chi) = (f_\alpha \circ g)(x) \Leftrightarrow$

$g_1(\chi)+b = g(x)+a$ (1)

Αλλά αφού οι g και g_1 είναι γραμμικές απεικονίσεις,

τότε $g_1(0)=0=g(0)$και η (1) δίνει:

$0+\alpha=0+b \Rightarrow a=b$.

Επομένως και $g_1(\chi)=g(x)$ για κάθε χ στον V.

Και το θεώρημα έχει αποδειχθεί.

Από την γραμμική άλγεβρα , γνωρίζουμε ότι για κάθε γραμμική απεικόνιση , υπάρχει μια ένας nxn πίνακας που καθορίζεται από την g και δίνει τις εικόνες της μέσω μιας βάσης του V. Αν dimV=n τότε:

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & a_{11}x_1 & \dots & a_{1n}x_n \\ x_1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{m1} & \cdots & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

<u>Πρόταση ΙΙΙ</u>: *Μια γραμμική απεικόνιση f: V→V είναι ισομετρία, αν και μόνο αν* $\|x\| = \|f(x)\| \qquad \forall x \in V$

Απόδειξη: ⟶

Αν η f ισομετρία, τότε *:*

$$\|x-0\| = \|f(x)-f(0)\| \qquad \forall x \in V$$

Αλλά όμως επειδή η f είναι και γραμμική , τότε f(0)=0

Οπότε

$$\|x-0\| = \|f(x)-0\| \qquad \forall x \in V$$

και τελικά $\|x\| = \|f(x)\| \qquad \forall x \in V$

Αντιστρόφως: ⟵ Ισχύει:

$\|x\| = \|f(x)\| \qquad \forall x \in V$ *, άρα και για x-y*

Άρα:

$$\|f(x-y)\| = \|x-y\| \qquad \Rightarrow (f\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\eta)$$
$$\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\| \Rightarrow (f\ \ \iota\sigma o\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha)$$

Εύρεση των Ευκλείδειων ισομετριών

Μια ορθογώνια απεικόνιση g : $R^2 \rightarrow R^2$ είναι μια γραμμική απεικόνιση και ορίζεται από έναν πίνακα (2χ2) ως εξής:

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+\beta y \\ \gamma\chi+\delta \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$g(x,y) = (ax+\beta y, \gamma\chi+\delta y)$$

Επομένως για να έχω ισομετρία, πρέπει κι αρκεί να ισχύει:

$\|(x,y)\| = \|ax+\beta y \ ,\gamma\chi+\delta y\| \Rightarrow$ (Με την ευκλείδεια νόρμα)

$$x^2+y^2=(ax+\beta y)^2+(\gamma\chi+\delta y)^2 \quad \forall x,y \in R$$

Από τα εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα συνάγω ότι οι συντελεστές των χ, y θα πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή:

$(\alpha^2+\gamma^2-1=0 \ , \beta^2+\delta^2-1=0 \ , \alpha\beta+\gamma\delta=0) \Rightarrow$

$(\beta=\mp\gamma \quad , \delta=\pm\alpha \quad \text{και} \quad \alpha^2+\gamma^2=1)$ (2)

Από την (2) παίρνω τους πίνακες των ορθογωνίων απεικονίσεων για τον R^2 που είναι :

$$\begin{pmatrix} a & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} ,\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \quad ,\textit{οπου} \ \alpha^2+\beta^2=1$$

Από τα προηγούμενα έχω ότι μια ισομετρία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας , παριστάνεται από την σύνθεση μιας ορθογώνιας απεικόνισης και μιας μεταφοράς κατά διάνυσμα α=(b,c) Επομένως οι εικόνες μιας τέτοιας ισομετρίας

f: $R^2 \rightarrow R^2$ θα δίνονται από τους επόμενους δύο τύπους:

$$\left(\begin{array}{l} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - \gamma y + b \\ \gamma\chi + \alpha y + c \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - \gamma y + b \\ \gamma\chi + \alpha y + c \end{pmatrix} \\ a^2 + \gamma^2 = 1 \end{array} \right)$$

Θέτοντας α=συνθ και γ=ημθ και για b=c=0 . ο πρώτος τύπος δίνει:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ y \end{pmatrix}$$

που αντιστοιχεί σε στροφή κατά γωνία θ .

Στον πρώτο τύπο για α=1 , γ=0 , έχω μεταφορά

f(x,y)=(x,y)+(b,c)

Στον δεύτερο τύπο για α=1 , γ=0 και b=c=0 έχω τον κατοπτρισμό f(x,y)=(x,-y).

Μπορεί εύκολα τώρα να αποδειχθεί, ότι αν έχω δύο ισομετρίες που απεικονίζουν τρία μη συνευθειακά σημεία στις ίδιες εικόνες, τότε αυτές οι ισομετρίες ταυτίζονται.

Δηλαδή, αν $f(x_\iota,y_i)=g(x_\iota,y_i)$ για i=1,2,3 , τότε f=g.

Η απόδειξη πραγματοποιείται με το ότι τα α, γ, b, c προσδιορίζονται μονοσήμαντα από τις αντίστοιχες εξισώσεις που ικανοποιούν τα τρία σημεία.

Σύμφωνα με το προηγούμενο, δοθησών δύο ίσων τριγώνων , υπάρχει ακριβώς μία συμμετρία που απεικονίζει το ένα επί του άλλου.

Έτσι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα κατά Κλάϊν και έχω την υλοποίηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σύμφωνα με την άποψη του μεγάλου αυτού μαθηματικού.-

Αξιωματικοποίηση προβλημάτων με χρήση μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Η λύση του προβλήματος του «σημείου του Fermat», δηλαδή «να βρεθεί σημείο Ρ του επιπέδου τέτοιο ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του Ρ από τρία σημεία του Α, Β, Γ να είναι ελάχιστο», δηλαδή έτσι ώστε

d(Ρ, Α)+d(Ρ, Β)+d(Ρ, Γ)=min,

είναι δύσκολη στην επίπεδη ευκλείδεια γεωμετρία (θεώρημα του Πτολεμαίου κτλ), η οποία πολλές φορές δεν είναι εφαρμόσιμη.

Να λυθεί το πρόβλημα του σημείου του Fermat με χρήση της μη ευκλείδειας γεωμετρίας του ταξιτζή, αν Α(-3, 3), Β(4, 1), Γ(1, -3) είναι οι γωνίες των οικοδομικών τετραγώνων μιας πόλης που βρίσκονται τρείς βενζιναντλίες και Ρ το σημείο που θέλουμε να γίνει το πλυντήριο αυτοκινήτων. Πόσο είναι το ελάχιστο άθροισμα;

Λύση

Η γεωμετρία του ταξιτζή είναι η γεωμετρία που εφαρμόζεται σε μια ιδανική «μπακλαβαδωτή» πόλη! …

Δηλαδή φανταζόμαστε, ότι υπάρχει μια πόλη όπου όλοι οι δρόμοι είναι οριζόντιοι (οδοί) ή κάθετοι (λεωφόροι). Τα οικοδομικά τετράγωνα, τα οποία είναι όλα ίσα μεταξύ τους, είναι τετράγωνα και ως σημεία θεωρούμε τις γωνίες των τετραγώνων.

Αν θέλουμε να πάμε από σε ένα σημείο Α σε ένα άλλο Β, που δεν ανήκουν στην ίδια οδό ή λεωφόρο, μπορούμε να κινηθούμε μόνο οριζόντια ή κάθετα. Έτσι δεν ισχύει πως η ελάχιστη διαδρομή είναι η

ευθεία διότι δεν μπορούμε σε μια τέτοια γεωμετρία να διαγράψουμε ευθείες, όπως στην ευκλείδεια, αλλά μόνο τεθλασμένες γραμμές. Οι διαδρομές που μπορούμε να ακολουθήσουμε είναι πολλές και αναζητείται η συντομότερη.

Για να βρούμε την συντομότερη διαδρομή, πρέπει να μετρήσουμε τον αριθμό των τετραγώνων που διανύουμε και να κρατήσουμε την διαδρομή με τα λιγότερα τετράγωνα. Πρέπει να παρατηρήσουμε ωστόσο ότι και έτσι δεν υπάρχει μοναδική ελάχιστη διαδρομή

Μαθηματικοποιώντας την παραπάνω περιγραφή, βλέπουμε πως αναφερόμαστε στο χώρο Ñ^2. Προκειμένου ωστόσο να μετράμε αποστάσεις, δεν χρησιμοποιούμε την ευκλείδεια μετρική, αλλά μια ματρική που ορίζουμε ως εξής: αν Α(x_A, y_A), Β(x_B, y_B)œ Ñ^2 , ορίζουμε ως απόσταση των σημείων Α, Β τον μη αρνητικό αριθμό:

$$d(A,\ B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| \quad \textbf{(1)}.$$

Πρέπει πρώτα να ελέγχουμε αν η **(1)** εισάγει ματρική στο Ñ^2 . Πρέπει :

$$d(A,\ B) \geq 0 \Rightarrow |x_A - x_B| + |y_A - y_B| \geq 0 \quad (\quad \text{ισχύει})$$

$$d(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=0 \Rightarrow |x_A-x_B|+|y_A-y_B|=0 \Rightarrow \begin{cases} |x_A-x_B|=0 \\ \kappa\alpha\iota \\ |y_A-y_B|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A-x_B=0 \\ \kappa\alpha\iota \\ y_a-y_B=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_A=x_B \\ \kappa\alpha\iota \\ y_A=y_B \end{cases} \Rightarrow \mathrm{A}=\mathrm{B}$$

$$d\ (\mathrm{A},\ \mathrm{B})=|x_A-x_B|+|y_A-y_B|=|-(x_B-x_A)|+|-(y_B-y_A)|=$$

$$=|x_B-x_A|+|y_B-y_A|=d\ (\mathrm{B},\ \mathrm{A})$$

$$d(\mathrm{A},\ \Gamma)+d(\Gamma,\ \mathrm{B})=|x_A-x_\Gamma|+|y_A-y_\Gamma|+|x_\Gamma-x_B|+|y_\Gamma-y_B|\geq$$

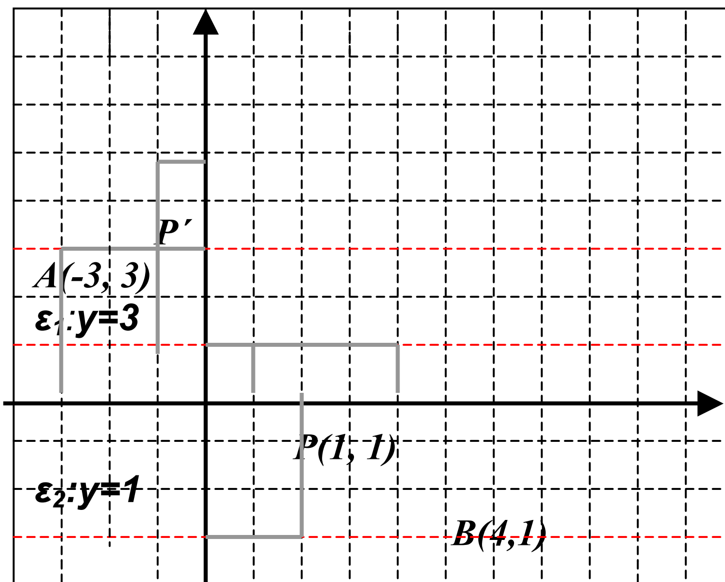
$$\geq|x_A-x_\Gamma+x_\Gamma-x_B|+|y_A-y_\Gamma+y_\Gamma-y_B|=|x_A-x_\mathrm{B}|+|y_\mathrm{A}-y_B|=d(\mathrm{A},\ \mathrm{B})$$

Συνεπώς η ισότητα **(1)** εισάγει μια μετρική στο Ñ^2, οπότε με αυτή θα μετράμε τις αποστάσεις στον χώρο. Στο πρόβλημα λοιπόν έχουμε τρία σημεία, τα Α(-3, 3),

B(4, 1), Γ(1, -3) που ανήκουν στο Ñ^2, και θέλουμε να βρούμε P σημείο ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα A, B, Γ να είναι ελάχιστο.

Παρατηρούμε ότι κανένα από τα A, B, Γ, ανά δύο, δεν είναι στην ίδια οδό ή λεωφόρο, έχουν δηλαδή διαφορετικές τετμημένες και τεταγμένες.

Αρχικά θα δείξουμε ότι το ζητούμενο σημείο P έχει τεταγμένη y_p.



Όλα τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των ευθειών ε_1 και ε_2 έχουν σταθερό άθροισμα αποστάσεων από αυτές, ίσο με την κατακόρυφη απόσταση $d_y(A, \Gamma)$, ενώ τα σημεία που είναι εκτός της ζώνης των ευθειών ε_1 και ε_2, έχουν μεγαλύτερο άθροισμα από την $d_y(A, \Gamma)$. Άρα το σημείο P που αναζητούμε πρέπει να είναι μεταξύ των ευθειών ε_1 και ε_2.

Πράγματι, αν το P τέτοιο ώστε: $y_A > y_P > y_\Gamma$ προς τις τεταγμένες τους έχουμε

$$y_{\text{A}} > y_{\text{P}} > y_{\Gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{\text{A}} - y_{\text{P}} > 0 \\ y_{\text{P}} - y_{\Gamma} > 0 \end{cases} \quad \text{οπότε} \quad d_y(\text{A},\ \text{P}) + d_y(\text{P},\ \Gamma)$$

$$= \left| y_{\text{A}} - y_{\text{P}} \right| + \left| y_{\text{P}} - y_{\Gamma} \right| = y_{\text{A}} - y_{\text{P}} + y_{\text{P}} - y_{\Gamma} = \left| y_{\text{A}} - y_{\Gamma} \right| = d_y(\text{A},\Gamma)$$

Επίσης παρατηρούμε οτι τα σημεία ‘εκτός’ της ζώνης των ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ δίνουν μεγαλύτερο άθροισμα στις διαφορές τεταγμένων. Έστω λοιπόν το P’ σε τέτοια θέση ώστε να ισχύει $y_{P'}>y_A>y_\Gamma$, οπότε θα έχουμε:

$$d_y(\text{P}',\ \text{A}) + d_y(\text{P}',\ \Gamma) = \left| y_{\text{P}'} - y_{\text{A}} \right| + \left| y_{\text{P}'} - y_{\Gamma} \right| = y_{\text{P}'} - y_{\text{A}} + y_{\text{P}'} - y_{\text{A}} =$$

$$= 2y_{\text{P}'} - y_{\text{A}} - y_{\Gamma} > y_{\text{A}} - y_{\Gamma}$$

Θα δείξουμε οτι για κάθε σημείο $P(x_P, y_P)$ *με* $-3 \le y_P \le 3$ το άθροισμα $d_y(P,A) + d_y(P,B) + d_y(P,\Gamma)$ γίνεται ελάχιστο αν και μόνο αν $y_P=1$, δηλαδή το P ανήκει στην οριζόντια ευθεία $ε_2$:y=1 που διέρχεται από το Β.

Πράγματι έστω $P(x_P, y_P)$ *και* $Q(x_q, y_q)$ σημεία του επιπέδου τέτοια ώστε $-3 \le y_q \le 3$ και $y_P=1$. Τότε:

$$d_y(P,\ A)+d_y(P,\ B)+d_y(P,\ \Gamma)=\left|y_p-y_A\right|+\left|1-1\right|+\left|y_P-y_\Gamma\right|=$$

$$d_y(A,\ \Gamma)\le d_y(A,\ \Gamma)+\left|y_q-1\right|=$$

$$d_y(Q,\ A)+d_y(Q,\ B)+d_y(Q,\ \Gamma)$$

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\quad d_y(\mathrm{P},\ A)+d_y(\mathrm{P},\ B)+d_y(\mathrm{P},\ \Gamma)\le d_y(Q,\ A)+d_y(Q,\ B)+d_y(Q,\ \Gamma)$$

Συνεπώς το P πρέπει να ανήκει στην ευθεία ε_2:y=1, δηλαδή πρέπει $y_P=1$

Με αντίστοιχους συλλογισμούς, θα προσδιορίσουμε την τετμημένη του P.

Ελέγχοντας τις τετμημένες των σημείων A, B, Γ βλέπουμε πως για το Γ ισχύει:

$x_A< x_\Gamma< x_B$, οπότε το P στην ζώνη των ευθειών x=-3 και x=4 και συγκεκριμένα θα έχει ίδια τετμημένη με αυτή του Γ. Άρα $x_P=1$.

Βρήκαμε λοιπόν πως το σημείο P θα έχει συντεταγμένες P(1, 1).

Οπότε αν υπολογίσουμε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα σημεία A, B, Γ θα έχουμε:

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{A})+d(\mathrm{P},\ \mathrm{B})+d(\mathrm{P},\Gamma)=\left|x_\mathrm{P}-x_\mathrm{A}\right|+\left|y_\mathrm{P}-y_\mathrm{A}\right|+\left|x_\mathrm{P}-x_\mathrm{B}\right|+$$
$$\left|y_\mathrm{P}-y_\mathrm{B}\right|+\left|x_\mathrm{P}-x_\Gamma\right|+\left|y_\mathrm{P}-y_\Gamma\right|=$$

$$\left|1-(-3)\right|+\left|1-3\right|+\left|1-4\right|+\left|1-1\right|+\left|1-1\right|+\left|1-(-3)\right|=4+2+3+4=13$$

Η διδακτική αξιοποίηση του λογισμικού Sketchpad στην διδασκαλία των Γεωμετρικών Απεικονίσεων στο επίπεδο.

Περίληψη: Η εργασία αυτή υπάγεται στην θεματική ενότητα 04

Ο δάσκαλος των Μαθηματικών στο περιβάλλον της τάξης, καλείται να εντάξει στην διδασκαλία του εκπαιδευτικά μαθηματικά λογισμικά, αλλάζοντας ριζικά τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας του, καθώς το περιβάλλον των λογισμικών, είναι συνήθως σχεδιασμένο σε νέες παιδαγωγικές θεωρήσεις της διδασκαλίας (Εποικοδομισμός , Ανακαλυπτική μάθηση). Παραστατικότητα, κίνηση, πειραματισμός και διερεύνηση είναι στοιχεία που προάγονται από το λογισμικό, άρα και η διατύπωση εικασιών, η ανακαλυπτική μάθηση και τελικά το κτίσιμο της γνώσης από τον ίδιο τον μαθητή. Στα πλαίσια αυτά, δραστηριότητες και ασκήσεις διαφοροποιούνται ποιοτικά από τις παραδοσιακές προσεγγίσεις. Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο την ανάδειξη αυτών των προσεγγίσεων μέσα από ένα ιδιαίτερα επιτυχημένο δυναμικό εκπαιδευτικό λογισμικό, επιδιώκοντας την εξοικείωση των δασκάλων των μαθηματικών με την φιλοσοφία των νέων μαθηματικών δυναμικών εργαλείων σε σχέση με το κεφάλαιο των Γεωμετρικών απεικονίσεων.

Yiannis P. Plataros *M.Edu, teacher of Mathematics*

Abstract: The mathematics teacher in the classroom environment, is required to integrate to his teaching of math education software, radically changing the traditional way of teaching, as the environment of software is usually designed with a new pedagogical approach of learning (constructivism, discovery learning) . Figuration, movement,

experimentation and exploration are elements promoted by the software, and therefore the conjecturing, discovery learning, and eventually the building of knowledge by the pupils. In this context, activities and exercises differ qualitatively from the traditional approaches. This paper aims to highlight these approaches through a highly successful educational software resources, seeking to familiarize teachers with the mathematical concept of new dynamic mathematical tools in relation to the chapter of Geometric depictions.

Εισαγωγή: Τα δυναμικά εκπαιδευτικά Μαθηματικά λογισμικά, έχουν επαναφέρει στο ορατό μαθηματικό γίγνεσθαι τον πειραματισμό και την κίνηση, ενώ έχουν προάγει την εποπτεία και την διερεύνηση σε απίστευτο βαθμό, σε σχέση πάντα με τα κρατούντα στην μαθηματική κοινότητα. Τα λογισμικά αυτά διαχέονται σε πολλές ενότητες, ενώ κάποιες τις αναδεικνύουν προνομιακά. Το sketchpad v4.07, είναι ένα πλήρως εξελληνισμένο δυναμικό εκπαιδευτικό Γεωμετρικό λογισμικό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί νομίμως σε όλα τα Ελληνικά σχολεία δημόσια και ιδιωτικά. Υποστηρίζει την διδασκαλία της Ευκλειδείου Γεωμετρίας ενώ παράλληλα μπορεί να την διασυνδέει με την Ανάλυση, αφού μπορεί ένα μέγεθος (μήκος , μέτρο γωνίας ή τόξου , εμβαδόν) να μεταβάλλεται σε πραγματικό χρόνο και να παριστάνεται η γραφική του παράσταση είτε ως συνάρτηση του χρόνου, είτε ως συνάρτηση οποιασδήποτε αλγεβρικής έκφρασης, ευνοώντας την διερεύνηση και τον πειραματισμό.

Οι ειδικές δυνατότητες του εργαλείου: Η πλήρης αξιοποίηση των δυνατοτήτων του λογισμικού γίνεται στους Γεωμετρικού τόπους , όπως και στις Γεωμετρικές απεικονίσεις, στο πραγματικό ή μιγαδικό επίπεδο. Το αρχέτυπο σημείο Α με συντεταγμένες (χ,ψ) , απεικονίζεται στην εικόνα του Β με συντεταγμένες (χ΄, ψ΄) , όπου γενικώς χ΄=φ(χ,ψ) και ψ΄=θ(χ,ψ) ,με φ και θ συναρτήσεις των χ,ψ, γραμμικές ή μη. Όταν η απεικόνιση γίνεται με γεωμετρική κατασκευή του Β, προφανώς οι συντεταγμένες του Β ως συνάρτηση των συντεταγμένων του Α, είναι ζητούμενες. Καθώς κινείται το Α, κινείται και το Β και το λογισμικό παρέχει τις παρακάτω δυνατότητες:

i) Το Α κινείται ελεύθερα στο επίπεδο και -αναλόγως της συναρτήσεως- η εικόνα του Β.

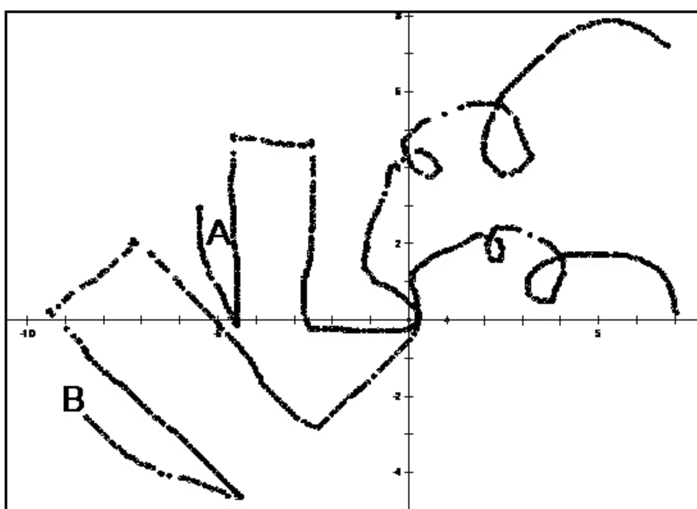
ii) Το Α κινούμενο ελευθέρως, διαγράφει ίχνος τροχιάς και ομοίως διαγράφει ίχνος το Β. (βλέπε σχήματα 1 και 2)

iii) Το Α κινείται επί ευθείας ή ευθυγράμμου τμήματος ή επί πολυγώνου ή επί κύκλου ή επί οποιασδήποτε γραφικής παραστάσεως και το Β διαγράφει τον αντίστοιχο γ.τ. Τα σχήματα επί των οποίων κινείται το Α, μπορούν να υποστούν δυναμικό χειρισμό (στροφή, μεταφορά, αλλαγή περιμέτρου, διαστάσεων, αυξομείωση πλευρών , παραμόρφωση σχήματος) και αυτομάτως και η εικόνα τους μέσω της αντιστοίχισης

Όλες οι αλγεβρικές εκφράσεις επιδέχονται παραμέτρους οι οποίες δύνανται με κατάλληλο μεταβολέα, να διατρέχουν κατάλληλο υποσύνολο του R, όπου η εικόνα του αρχετύπου φαίνεται ότι μεταβάλλεται ταυτοχρόνως με την μεταβολή της παραμέτρου.

.

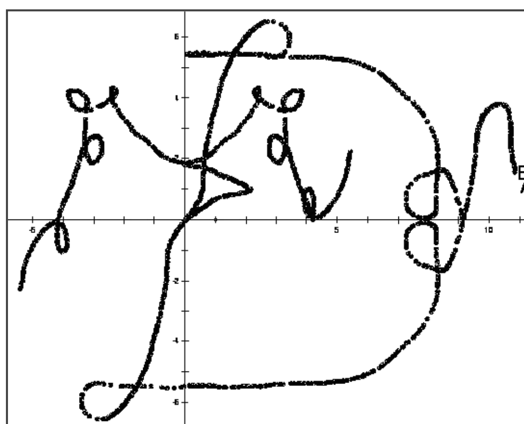
Η νέα οπτική προσέγγισης των γεωμετρικών απεικονίσεων: Οι δυνατότητες που παρέχει το εργαλείο, τουλάχιστον για όποιον έρχεται πρώτη φορά σε επαφή με αυτές, είναι εντυπωσιακές, αλλά και καινοτόμες ως προς την διδασκαλία, αφού στην Πατρίδα



Σχήμα 1: Μια απεικόνιση, όπου φαίνεται να είναι μεγέθυνση με στροφή και σχεδιάζεται με ελεύθερη κίνηση του Α.

μας, έχουν αρχίσει να γίνονται γνωστές τα τελευταία 15 χρόνια , χωρίς όμως να έχουν διεισδύσει ακόμα όσο –ίσως- θα επιθυμούσαμε στην εκπαιδευτική διαδικασία. Αρκετά διδακτικά πλεονεκτήματα προσέγγισης της έννοιας των γεωμετρικών απεικονίσεων μπορούν να φανούν με τα παρακάτω επιλεγμένα παραδείγματα δραστηριοτήτων, αν και κάποια δεν αποτελούν πλέον μέρος του Αναλυτικού προγράμματος στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση:

Παράδειγμα1 :Σε ένα αρχείο του Sketchpad, κατασκευάζουμε την απεικόνιση Α(χ,ψ)→Β(|χ|,|ψ|) , την συναρτησιακή σχέση της οποίας αποκρύπτουμε και καλούμε τους μαθητές να την μαντέψουν, διερευνώντας τις θέσεις του Β στο επίπεδο, μεταβαλλόμενου του Α. Ουσιαστικά πρέπει οι μαθητές **να παρατηρήσουν** ότι καθώς το Α κινείται σε όλο το επίπεδο, η εικόνα του κινείται μόνο στο 1^{ο} τεταρτημόριο, ότι καθώς το Α κινείται πάνω στους άξονες ομοίως και η εικόνα του, ότι υπάρχουν συμμετρίες ως προς άξονες και ως προς την αρχή τους. Η δραστηριότητα αυτή, αφορά ουσιαστικά ένα ανοικτό πρόβλημα. Είναι διαπιστωμένο, ότι η εμπλοκή των μαθητών με ένα ανοικτό πρόβλημα που απαιτεί διερεύνηση και πειραματισμό, ενισχύει από τη μεριά τους την δημιουργία εικασιών και τον έλεγχό τους, την διατύπωση κανόνων και γενικεύσεων, την αξιοποίηση ενός μεγάλου εύρους και ποικιλίας γνώσεων και εμπειριών μέσω των οποίων αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος.[4] Η δραστηριότητα, ανάλογα με το γνωστικό επίπεδο των μαθητών, μπορεί να επεκταθεί στην ερμηνεία όταν η εικόνα έχει την μορφή Β(|χ-3|,|ψ+2|) ή Β(|χ|+3,|ψ|+2) πότε ταυτίζονται οι εικόνες κτλ .



Σχήμα 2: Η απεικόνιση των συντεταγμένων στις απόλυτες τιμές τους, δίνει μια ενδιαφέρουσα δραστηριότητα.

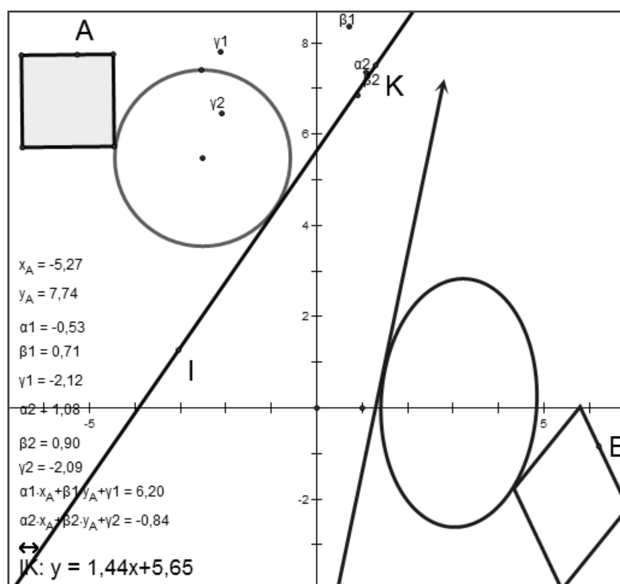
Διδακτικά πλεονεκτήματα της προσέγγισης: α) Συνεχής παρατήρηση και πειραματισμός που δεν μπορεί να γίνει με στατικά μέσα. β)διερμηνεία της κίνησης σε αλγεβρική σχέση των συντεταγμένων. Αυτό επίσης δεν μπορεί να γίνει με στατικά μέσα. γ) Η όλη δραστηριότητα δημιουργεί μια

αμφίδρομη ερμηνεία μεταξύ γεωμετρικής και αλγεβρικής έκφρασης γεγονός που προάγει την διασύνδεση μεταξύ πολλαπλών αναπαραστάσεων μιας έννοιας.

Παραδειγμα 2: Στις ομοπαραλληλικές απεικονίσεις του επιπέδου, έχουμε Α(χ,ψ)→Β(χ΄, ψ΄) με

$$\begin{aligned} \chi' &= \alpha_1\chi + \beta_1\psi + \gamma_1 \\ \psi' &= \alpha_2\chi + \beta_2\psi + \gamma_2 \quad \mu\varepsilon \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

με α_i, β_i, γ_i πραγματικούς. Η χαρακτηριστική ιδιότητα όλων, είναι ότι «διατηρούν τις ευθείες» (δηλ. μια ευθεία απεικονίζεται πάντα σε ευθεία) και εδώ ανήκουν οι πιο γνωστοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί όπως η αξονικές συμμετρίες (κατοπτρισμοί) κεντρικές συμμετρίες, οι παράλληλες μεταφορές, οι στροφές και οι ομοιοθεσίες. Με το δυναμικό εργαλείο, ο διδασκόμενος, μπορεί:



Σχήμα 3: Στο απεικονίζον σημείο Α, μπορεί να προσαρτηθεί οποιοδήποτε γεωμετρικό σχήμα και να βρεθεί ο γ.τ. του Β, καθώς το Α διαγράφει την περίμετρο του σχήματος.

1)Να μεταβάλλει μία – μία κατά το δοκούν τις παραμέτρους α_i, β_i, γ_i , και να παρατηρεί τις μεταβολές.

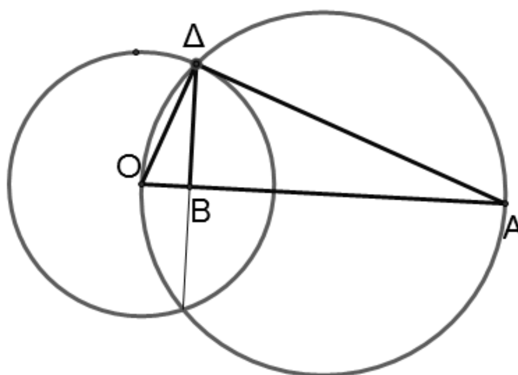
2)Να προσαρτά στο Α οποιοδήποτε σχήμα (Σχήμα 3) και να βρίσκει τον γ.τ. του Β. Στην συνέχεια, η ευθεία-αρχέτυπο, μπορεί να μετακινείται παράλληλα με τον εαυτό της ή να περιστρέφεται και να παρακολουθείται η κίνηση της αντίστοιχης εικόνας. Ομοίως μπορεί να αυξομειώνεται η ακτίνα του κύκλου, να μετακινείται το κέντρο του και να παρακολουθούνται οι

αντίστοιχες αλλαγές, όπως και με το τετράγωνο, το οποίο μπορεί να μεταβάλλει μήκος πλευράς καθώς και να μετακινείται.

Διδακτικά πλεονεκτήματα: α) Φαίνεται, ότι η τιμή 0 της ορίζουσας για την οποία όλα τα σχήματα απεικονίζονται σε ευθεία, δεν είναι απλώς μια τιμή που εξαιρείται για αλγεβρικούς λόγους, αλλά ότι είναι μια οριακή τιμή μιας συνεχούς προοδευτικής μεταβολής, όπου το επίπεδο φαίνεται να συμπιέζεται σε ευθεία. Αυτό επιτυγχάνεται με την μεταβολή των $α_i$, $β_i$, όπου τα απεικονιζόμενα σχήματα φαίνονται να «συμπιέζονται» σε μια ευθεία ή να «φουσκώνουν» αναλόγως με τις τιμές των $α_i$, $β_i$.

β)Παρέχεται και εδώ πολύ μεγάλη δυνατότητα πειραματισμού παρατήρησης και διερεύνησης με κάθε σχήμα που θα επιθυμήσει (και είναι κατασκευαστό) ο μαθητής.

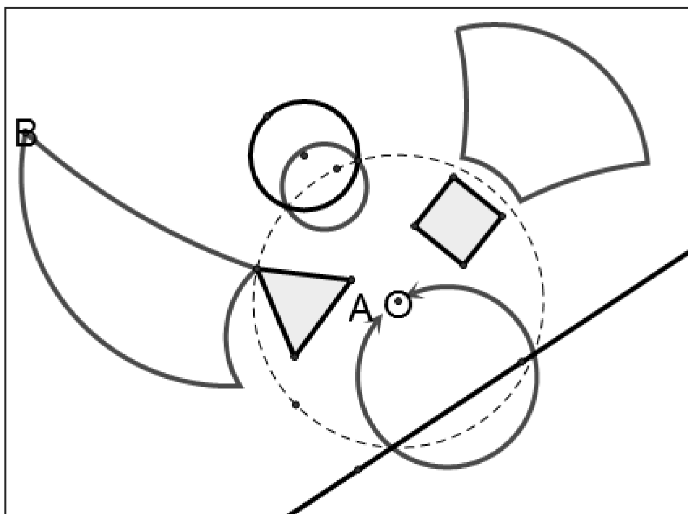
Παράδειγμα 3: Στην Αντιστροφή ως προς κύκλο, έχω Α(χ,ψ)→Β(χ΄,ψ΄) όπου το Β προκύπτει από το Α με την εξής διαδικασία: Όταν το Α είναι εκτός του κύκλου, φέρουμε εφαπτόμενη προς τον κύκλο, την ΑΔ, έπειτα την ακτίνα ΟΔ και ακολούθως την $ΔΒ \perp ΟΑ$ (σχήμα 4) Έτσι, κάθε σημείο του επιπέδου εκτός κύκλου, απεικονίζεται εσωτερικά του κύκλου. Ομοίως, με την αντίστροφη διαδικασία, κάθε σημείο στο εσωτερικό του κύκλου απεικονίζεται εξωτερικά του και κάθε σημείο επί του κύκλου στον εαυτό του. Το Ο, απεικονίζεται σε ένα φανταστικό σημείο στο άπειρο(δεν απεικονίζεται δηλ. σε σημείο συγκεκριμένο) . Οι συντεταγμένες του Β, βρίσκονται με την βοήθεια του γνωστού θεωρήματος του Ευκλείδη *που λέει, ότι «Το τετράγωνο εκάστης κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου, ισούται με την υποτείνουσα επί την προβολή της επί ταύτην»* Έτσι λαμβάνουμε για στο καρτεσιανό σύστημα



Σχήμα 4: Στην Αντιστροφή ως προς κύκλο, το Α απεικονίζεται στο Β εσωτερικά του κύκλου και κάθε Β εσωτερικά του κύκλου(πλην του Ο) εκτός, στο Α , ενώ κάθε σημείο του κύκλου στον εαυτό του . Το Ο θεωρείται ότι απεικονίζεται σε κάποιο φανταστικό σημείο στο άπειρο.

συντεταγμένων, $\chi' = \dfrac{\chi \cdot \rho^2}{\chi^2 + \psi^2}$, $\psi' = \dfrac{\psi \cdot \rho^2}{\chi^2 + \psi^2}$, (1) όπου ρ το μήκος της ακτίνας του κύκλου και Ο η αρχή των αξόνων.

Η αντιστροφή, είναι μια σπουδαίας σημασίας γεωμετρική απεικόνιση με γόνιμα αποτελέσματα στην επίλυση δύσκολων προβλημάτων (λ.χ. Απολλώνιο Πρόβλημα επαφής) [2],[3] ή στην κατασκευή εικόνας σε κοίλο ή κυρτό κάτοπτρο κ.ά. [2] Με όπλο το Sketchpad, μπορούμε εκμεταλλευόμενοι τις δυνατότητές του, να προσεγγίσουμε την σπουδαία αυτή απεικόνιση με εντελώς ανακαλυπτικό τρόπο. Αφού ο μαθητής κατασκευάσει την απεικόνιση, μπορεί να κάνει ισχυρές εικασίες σχετικά με τις ιδιότητες της απεικόνισης, τις οποίες φυσικά στην συνέχεια θα κληθεί να αποδείξει Οπωσδήποτε όμως, υπάρχει πειραματισμός, ανάπτυξη ισχυρών εικασιών, τεράστια ευχέρεια διερεύνησης, καθώς στο Α μπορούν να προσαρτηθούν ευθεία, κύκλος, τετράγωνο, και γενικά οποιαδήποτε καμπύλη, όλα δυναμικά μεταβαλλόμενα και να λαμβάνω κάθε φορά τις εικόνες τους.



Σχήμα 5: Ο κύκλος με την διακεκομμένη γραμμή είναι ο κύκλος αντιστροφής, τα σχήματα με τα πιο μαύρα περιγράμματα τα αρχέτυπα , ενώ τα πιο γκρίζα σχήματα, οι εικόνες τους.

Η δυναμική διερεύνηση μπορεί να αναδείξει τις εικασίες:

α) Ότι η εικόνα ευθείας είναι κύκλος και στην περίπτωση που η ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής είναι ο εαυτός της. β) Ότι η εικόνα κύκλου είναι κύκλος, εκτός από την περίπτωση που ο κύκλος

διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής, οπότε είναι ευθεία. γ) Η εικόνα - ευθεία φαίνεται να είναι οριακή περίπτωση κύκλου με άπειρη ακτίνα.

Τα παραπάνω, προκύπτουν άμεσα με σχετική ευκολία. Στην συνέχεια, οι εικασίες μπορούν να ελεγχθούν με την άλγεβρα και την αναλυτική Γεωμετρία. Μάλιστα, οι αρχικές εικασίες μπορούν να γίνουν πιο ακριβείς, καθώς το Ο φαίνεται να μην έχει εικόνα και αυτό να προκαλέσει τον μαθητή για την αλγεβρική ερμηνεία (μηδενίζεται ο παρονομαστής των κλασμάτων της (1))

Διδακτικά πλεονεκτήματα: Με την τεράστια ευχέρεια πειραματισμού και διερεύνησης που παρέχει το εργαλείο, ο μαθητής παράγει πρώτα τις εικασίες, τις ισχυροποιεί, διατυπώνει τις προτάσεις που θα αποδείξει και ενδεχομένως αναδιατυπώνει ορισμένες αστοχίες. Το ίδιο αποτέλεσμα με στατικά μέσα απαιτεί τεράστια δυσκολία , χρόνο, ενώ αυτός που θα κληθεί να εικάσει προτάσεις θα πρέπει να έχει μεγάλη μαθηματική ικανότητα, όλα αυτά, πρακτικά απαγορευτικά για μαθητές.

Γενικά Διδακτικά Συμπεράσματα: 1) Η κατάλληλη χρήση των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών, μπορεί να δημιουργήσει μαθηματικές εικασίες τις οποίες στην συνέχεια καλούνται οι μαθητές να αποδείξουν.

2) Η διαδικασία του σχήματος : Πειραματίζομαι→Εικάζω→Ελέγχω τις εικασίες μου→Διορθώνω τις εικασίες και τις επαναδιατυπώνω , ανήκει στο μοντέλο της μαθηματικής ανακάλυψης του Lakatos. [5] Αυτή η πραγματική ερευνητική διαδικασία αντιστοιχίζεται στην επαν-ανακάλυψη της μαθηματικής γνώσης και ανήκει στην θεωρία του J. Bruner που θεωρεί ότι η μάθηση συντελείται με ανακαλυπτικές διαδικασίες (καθοδηγούμενη ανακάλυψη, προσομοίωση ανακάλυψης) [6]

3) Στο παράδειγμα 2 , δίνεται η ευκαιρία να διασαφηνιστεί η έννοια «παράμετρος» και «μεταβλητή», καθώς η μεταβολή μιας εκάστης παραμέτρου από τις $α_i$, $β_i$, μεταβάλει ολόκληρο το απεικονιζόμενο σχήμα, ενώ η μεταβολή της «μεταβλητής» (εδώ το σημείο (χ,ψ)) καθορίζει το σχήμα. Παράλληλα, η έννοια του «αγνώστου» μπορεί να αναδειχθεί μέσω ενός ερωτήματος λ.χ. του τύπου «βρείτε ένα σημείο που να απεικονίζεται στον εαυτό του, ποία άλλα τέτοια σημεία υπάρχουν;»

3) Η διαδικασία μετάφρασης και ερμηνείας της οπτικής αναπαράστασης σε άλγεβρα και αντιστρόφως, προάγει την πολλαπλή αναπαράσταση των εννοιών, εδώ των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Γεωμετρική και Αλγεβρική γλώσσα συνυπάρχουν και είναι ανταλλάξιμες με ένα συμπληρωματικό και ταυτόχρονα εποικοδομητικό τρόπο.[1]

4) Επάγονται προς απόδειξη απειροστικές διαδικασίες, καθώς η εικόνα της ευθείας ψ=αχ+β , όταν β→0 δίνει ακτίνα της εικόνας –κύκλου R→ ∞

5) Στο μιγαδικό επίπεδο με ανάλογες πρακτικές, μπορεί να παρασταθεί οποιαδήποτε απεικόνιση z→f(z).

6) Το ίδιο το εργαλείο, χαρακτηρίζεται ως «ερευνητικό» και για τους μαθηματικούς που κάνουν έρευνα στην Γεωμετρία (Ευχερής ανάπτυξη εικασιών και γρήγορος έλεγχός τους) Ταυτόχρονα είναι και εκπαιδευτικό εργαλείο για την «καθοδηγούμενη ανακάλυψη» εκ μέρους των μαθητών. Το γεγονός αυτό είναι αρκετά ενδιαφέρον, καθώς η ερευνητική άσκηση μπορεί να γίνεται με το ίδιο ή παρεμφερές μέσον για όλους.

Όλα τα παραπάνω, αλλάζουν σημαντικά την προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης, καθώς η κατασκευή της, συνδέεται στενά με την χρήση των εργαλείων. Ταυτόχρονα, φαίνεται ότι η χρήση της τεχνολογίας, αναδεικνύει την μαθηματική γνώση περισσότερο ως ένα χρήσιμο μέσον για την κατασκευή μοντέλων, παρά ως μία αυτοτελή, αξιωματικά θεμελιωμένη, θεωρία γνώσης.[1], [7] Η φύση της απόδειξης, φαίνεται να αλλάζει κι αυτή και να μην απαιτείται τόσο πολύ η εσωτερική δομή των μαθηματικών.[1]. Οι προβληματισμοί υπάρχουν. Από την άλλη, όλα τα εκτεθέντα πλεονεκτήματα του δυναμικού χειρισμού σχημάτων και αλγεβρικών παραστάσεων καθώς και η αντίστοιχη δυναμική οπτικοποίησή τους, σε σχέση με το επί χιλιετηρίδες χρησιμοποιούμενο στατικό μολύβι και χαρτί, δεν μπορούν πλέον να αγνοηθούν από κανέναν.

Βιβλιογραφία – Διαδίκτυο:

[1] : **Γαβρίλης Κωνσταντίνος, Κασιμάτης Νικόλαος, Παπαμιχάλης Κωνσταντίνος**,*Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί –Βιβλίο Καθηγητή* Εκδόσεις

Καστανιώτη Α.Ε. Διατίθεται εδώ: http://data.e-yliko.gr/softpackets/No168_Geometrikoi_Metasximatismoi/Geometrikoi_Metasximatismoi.zip

[2]:**Παντελίδης Γιώργος –Κραββαρίτης Δημήτριος** *Λεξικό Μαθηματικών,* Εκδόσεις Πατάκη (Μετάφραση –επεξεργασία του αντιστοίχου Γερμανικού, του οίκου Duden) Αθήνα 1997

[3]: http://el.wikipedia.org/wiki/Απολλώνιο_πρόβλημα

[4]: **Κυνηγός Χ., Δρ. Ψυχάρης Γ., Γαβρίλης Κ., Κεΐσογλου Σ.** Επιμοφωτικό υλικό για το Β΄ επίπεδο στους ΠΕ-03 «Ειδικό μέρος» Διατίθεται εδώ: http://www.pdfdownload.org/pdf2html/view_online.php?url=http%3A%2F%2F1gym-farsal.lar.sch.gr%2Fkse%2Feidiko_meros_pe3.pdf

[5]: **Lakatos Imre** «Αποδείξεις και Ανασκευές-Η λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης» Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα 1996

[6] : http://www.learning-theories.com/discovery-learning-bruner.html

[7] : http://www.lettredelapreuve.it